Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON W. SÜSS

65. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 27. JUNI 1956)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

65. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Endl, K., Über Klassen von Limitierungsverfahren, die die Klasse der Hausdorffschen Verfahren als Spezialfall enthalten 113
Schubert, H., Knoten mit zwei Brücken 133
Shah, S. M., and S. K. Singh, On the derivative of a meromorphic function with maximum defect 171
Grauert, H., und R. Remmert, Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen 175
Bojanić, R., W. Jurkat und A. Peyerimhoff, Über einen Taubersatz für Faltungen 195
Dold, A., Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten 200
Mohanty, R., and S. Mohapatra, On the absolute logarithmic summability of a Fourier series 207
Eichler, M., Berichtigung zu meiner Arbeit über den Hilbertschen Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers 214

ENDL, K.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 113—132 (1956)

Über Klassen von Limitierungsverfahren, die die Klasse der Hausdorffschen Verfahren als Spezialfall enthalten

Von
KURT ENDL

Einleitung

Ein HAUSDORFF-Verfahren H ist bekanntlich ein lineares Limitierungsverfahren, das sich mit Hilfe einer beliebigen Diagonalmatrix $\mu = (\mu_n)$ und der Differenzenmatrix $\delta = \left((-)^n \binom{m}{n}\right)$ in der Form

$$H = \delta \mu \delta \tag{1}$$

darstellen läßt. Eine Reihe von wichtigen Eigenschaften der Klasse $\mathfrak{H}$ aller HAUSDORFF-Verfahren beruht auf der Möglichkeit der Darstellung eines jeden Verfahrens in der Form (1) bzw. auf der Tatsache, daß die Differenzenmatrix δ gleich ihrer Inversen ist

$$\delta = \delta^{-1}. \tag{2}$$

So sind z.B. die Verträglichkeit und Vertauschbarkeit aller HAUSDORFF-Verfahren auf (1) und (2) zurückzuführen. Es liegt nun nahe, Klassen von Limitierungsverfahren zu untersuchen, die auf eine zu (1) analoge Weise mit Hilfe von Diagonalmatrizen μ und einer Matrix δ^* mit der Eigenschaft $\delta^* = (\delta^*)^{-1}$ erzeugt werden.

Wir legen unseren Untersuchungen eine abzählbare Klasse von Matrizen $\delta^{(k)}$ $(\delta^{(k)} = (\delta^{(k)})^{-1};\ k = 1, 2, \ldots)$ zugrunde, die in natürlicher Weise die Differenzenmatrix δ verallgemeinern $(\delta = \delta^{(1)})$ und gewinnen auf diese Weise abzählbare viele Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ von Limitierungsverfahren. Die HAUSDORFFsche Klasse $\mathfrak{H}$ tritt als einfachster Fall auf: $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}^{(1)}$. Für jede dieser Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ existiert ein Verfahren $C^{(k)} \in \mathfrak{M}^{(k)}$ mit der Eigenschaft: Die Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ besteht aus allen linearen Limitierungsverfahren, die mit $C^{(k)}$ vertauschbar sind. Ferner gelten für alle k die schönen Eigenschaften der HAUSDORFFschen Klasse: Alle Verfahren einer Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ sind verträglich und vertauschbar. Die Frage nach dem Durchschnitt von verschiedenen Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ ist vollständig gelöst: Zwei verschiedene Klassen haben nur gewisse triviale Verfahren gemeinsam, deren Matrizen Diagonalmatrizen sind.

Betrachten wir die Unterklassen $\mathfrak{R}^{(k)}$ der regulären Verfahren von $\mathfrak{M}^{(k)}$, so gilt sogar: Die Klassen $\mathfrak{R}^{(k)}$ sind bis auf das Einheitsverfahren paarweise fremd.

Die Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ der Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ erlauben eine einfache Deutung. Jedes Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ ist identisch mit einem Verfahren, das durch „gleichzeitige Anwendung" von k HAUSDORFF-Verfahren $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$

entsteht. Hierbei ist „gleichzeitige Anwendung" in dem Sinne zu verstehen, daß jedes Teilverfahren H_ϱ auf eine Teilfolge $\left\{s_n^{(\varrho)}\right\} = \{s_{\varrho+nk}\}$ der zu limitierenden Folge $\{s_n\}$ anzuwenden ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$. Wir werden in diesem Sinne die neuen Verfahren unmißverständlich als „Produkt" von HAUSDORFF-Verfahren schreiben

$$(M^{(k)}, \mu) = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}.$$

Von den gewonnenen Regularitätskriterien sei nur das folgende angeführt: Das Verfahren $(M^{(k)}, \mu) = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}$ ist genau dann regulär, wenn jedes Teilverfahren H_ϱ regulär ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Zu Wirkfelduntersuchungen wird in bequemer Weise die geometrische Reihe herangezogen. Während nach AGNEW im Falle der HAUSDORFF-Verfahren H die geometrische Reihe in Kreisen summiert wird, sind für $k \geqq 2$ die Limitierungsgebiete der geometrischen Reihe in bezug auf die neuen Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ CASSINIsche Ovale. Dies erlaubt, neben der Bemerkung, daß jetzt im Gegensatz zu den HAUSDORFF-Verfahren die geometrische Reihe für $k \geqq 2$ in Punkten der rechten Halbebene $\Re(z) > 1$ summiert wird, folgende interessante Aussage über analytische Fortsetzung: Das BOREL-OKADAsche Gebiet $M^{(k)}(B)$ [dies ist das Gebiet, in dem die Potenzreihen $\sum_0^\infty a_n z^n$ *aller* auf dem Sterngebiet B reguläranalytischen Funktionen $f(z)$ durch $(M^{(k)}, \mu)$ summiert werden] ist für gerade k bei beliebigem B nullpunktsymmetrisch.

Das Problem der Verträglichkeit von Verfahren aus verschiedenen Klassen ist ungelöst. Auch über Vergleichbarkeit bzw. Unvergleichbarkeit von Verfahren verschiedener Klassen ist allgemein noch nichts bekannt. Es sei nur ein Ergebnis hervorgehoben, das vielleicht schon ein wenig Licht auf diese schwierig erscheinenden Fragen wirft. Wir werden aus jeder Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ein Verfahren $M^{*(k)}$ herausgreifen und beweisen: Die Verfahren $M^{*(k)}$ sind für verschiedene k paarweise unvergleichbar.

Schließlich sei noch eine Beobachtung erwähnt, die darauf hinweist, in welcher Weise die neuen Verfahren zur Gewinnung eines Einblicks in die Struktur von Folgen benutzt werden können. Wir geben eine Folge an, die weder $(C, 1)$- noch $(E, 1)$-limitierbar ist, dagegen durch das Verfahren $(C, 1) \times (E, 1)$ zu $\frac{1}{2}$ limitiert wird. Dies bedeutet, daß man durch eine geeignete Zusammenstellung von HAUSDORFF-Verfahren $H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}$ zu einem unserer Produktverfahren $H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}$ Folgen limitieren kann, für welche die einzelne Anwendung jedes Verfahrens versagt.

§1. HAUSDORFF-Verfahren[1])

Wir stellen hier kurz die Eigenschaften der HAUSDORFF-Verfahren zusammen, auf die wir im Verlauf der Arbeit fortwährend zurückgreifen müssen.

[1]) Alle hier angeführten Sätze über HAUSDORFF-Verfahren findet man z. B. in dem Lehrbuch von G. H. HARDY: Divergent Series (Oxford University Press) in Kapitel XI, Hausdorff Means (247—282). Man findet dort auch ein Literaturverzeichnis.

Definition der HAUSDORFF-*Verfahren*

Ein HAUSDORFF-Verfahren ist ein lineares Limitierungsverfahren

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} h_{m\,n}\, s_n ,$$

dessen Matrix $H = (h_{m\,n})$ in der Form $H = \delta \mu \delta$ darstellbar ist, wobei δ die Differenzenmatrix $\left((-)^n \binom{m}{n}\right)$ und μ eine beliebige Diagonalmatrix (μ_n) ist. Wir sprechen im folgenden kurz von einem H-Verfahren und bezeichnen es mit (H, μ) oder, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, mit H. Dieselben Symbole bedeuten gleichzeitig auch die zugehörigen Matrizen.

Die CAESAROschen Verfahren (C, k), die EULERschen Verfahren (E, q) und die HÖLDERschen Verfahren (H, k) sind H-Verfahren.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. Zwei H-Verfahren H_1 und H_2 sind vertauschbar.

Satz 2. Alle H-Verfahren sind verträglich[2]).

Satz 3. Die Klasse $\mathfrak{H}$ der H-Verfahren ist identisch mit der Klasse aller linearen Verfahren, die mit dem $(C, 1)$-Verfahren vertauschbar sind.

Ein Limitierungsverfahren A heißt regulär oder permanent, wenn jede Folge $\{s_n\}$, die im gewöhnlichen Sinn zu s konvergiert, durch das Verfahren A ebenfalls zum Wert s limitiert wird. Bezeichnen wir eine Folge $\{a_n\}$ als total monoton, wenn für alle $n = 0, 1, \ldots$ und $p = 0, 1, \ldots$ gilt

$$\Delta^p a_n = \sum_{\nu=0}^{p} (-)^\nu \binom{p}{\nu} a_{n+\nu} \geq 0 ,$$

so kann das Regularitätskriterium für H-Verfahren folgendermaßen formuliert werden:

Satz 4. Das Verfahren (H, μ) ist genau dann regulär, wenn die Folge $\{\mu_n\}$ Differenz zweier total monotoner Folgen ist, $\Delta^m \mu_0 \to 0$ strebt und $\mu_0 = 1$ ist.

Ist $\chi(x)$ auf $[0, 1]$ eine Funktion von beschränkter Schwankung, so heißt

$$\mu_n = \int_0^1 x^n \, d\chi$$

die Momentenkonstante der Funktion χ vom Rang n, $\{\mu_n\}$ die zu χ gehörige Momentenfolge. Gilt noch weiter $\chi(1) = 1$ und $\chi(+0) = \chi(0) = 0$ (stetiges Verschwinden am 0-Punkt), so heißt die Momentenkonstante μ_n bzw. die Momentenfolge $\{\mu_n\}$ regulär. Definieren wir schließlich den Funktionswert von χ an Unstetigkeitsstellen $x \in (0, 1)$ durch $\chi(x) = \frac{1}{2}[\chi(x-0) + \chi(x+0)]$, so gilt: Die Funktion $\chi(x)$ ist durch die reguläre Folge $\{\mu_n\}$ eindeutig bestimmt. Ein reguläres Verfahren (H, μ) ist hiernach auch durch die zu der regulären Momentenfolge $\{\mu_n\}$ gehörigen Funktion $\chi(x)$ bestimmt. Wir schreiben

[2]) Zwei Verfahren A und B heißen verträglich, wenn für jede Folge $\{s_n\}$ die von A zu dem Wert s, von B zum Wert s' limitiert wird, gilt $s = s'$.

deshalb für reguläre Verfahren statt (H, μ) manchmal auch (H, χ). Der Zusammenhang zwischen Momentenfolgen und total monotonen Folgen wird durch die folgenden Sätze gegeben:

Satz 5. Jede Momentenfolge ist Differenz zweier total monotoner Folgen und umgekehrt.

Satz 6. Für jede reguläre Momentenfolge $\{\mu_n\}$ gilt $\mu_0 = 1$ und $\Delta\mu_0 \to 0$.

Aus Satz 4 und Satz 6 folgt damit eine andere Form des Regularitätskriteriums:

Satz 7. Das Verfahren (H, μ) ist genau dann regulär, wenn $\{\mu_n\}$ eine reguläre Momentenfolge ist.

Das allgemeine Matrixelement h_{mn} des Verfahrens (H, μ) drückt sich in den Folgenelementen μ_n folgendermaßen aus

$$h_{mn} = \binom{m}{n} \Delta^{m-n} \mu_n. \tag{1.1}$$

Ist (H, μ) regulär, so gilt mit der zugehörigen Funktion $\chi(x)$ auch die Darstellung

$$h_{mn} = \binom{m}{n} \int_0^1 (1-x)^{m-n} x^n \, d\chi. \tag{1.2}$$

Über den Vergleich von regulären H-Verfahren $H = (H, \mu)$ und $H' = (H, \mu')$, für deren Diagonalmatrizen $\mu = (\mu_n)$ und $\mu' = (\mu'_n)$ für alle n $\mu_n \neq 0$ und $\mu'_n \neq 0$ ist, gilt

Satz 8. Das reguläre Verfahren (H, μ) ist genau dann stärker als das reguläre Verfahren (H, μ'), wenn die Folge $\left\{\frac{\mu_n}{\mu'_n}\right\}$ eine reguläre Momentenfolge ist.

Korollar. Die Verfahren (H, μ) und (H, μ') sind genau dann äquivalent, wenn sowohl $\left\{\frac{\mu_n}{\mu'_n}\right\}$ als auch $\left\{\frac{\mu'_n}{\mu_n}\right\}$ eine reguläre Momentenfolge ist.

§2. Einführung der verallgemeinerten Differenzenmatrizen $\delta^{(k)}$

Wir führen jetzt eine abzählbare Klasse von Matrizen ein, die in natürlicher Weise die Differenzenmatrix $\delta = \left((-)^n \binom{m}{n}\right)$ verallgemeinert.

Sei k eine feste natürliche Zahl. Jede andere natürliche Zahl m läßt sich in der Form darstellen $m = m_k^* + m_k \cdot k$ wobei $0 \leq m_k^* < k$ ist. Wir definieren unter Benutzung des Symbols

$$\delta_{mn}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } m \equiv n\,(k) \\ 0 & \text{für } m \not\equiv n\,(k) \end{cases}$$

die Matrix

$$\delta^{(k)} = \left((-)^{n_k} \binom{m_k}{n_k} \delta_{mn}^{(k)}\right)$$

und behaupten:

Satz 8'. Für jede natürliche Zahl k ist $\delta^{(k)} = (\delta^{(k)})^{-1}$ oder $(\delta^{(k)})^2 = \mathfrak{E}$ ($\mathfrak{E}$ Einheitsmatrix).

Beweis. Das Element in der m-ten Zeile und n-ten Spalte der Produktmatrix $\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)}$

$$(2.1) \qquad \sum_{l=n}^{m} (-)^{l_k} \binom{m_k}{l_k} \delta_{ml}^{(k)} \cdot (-)^{n_k} \binom{l_k}{n_k} \cdot \delta_{ln}^{(k)} = (-)^{n_k} \binom{m_k}{n_k} \sum_{l=n}^{m} (-)^{l_k} \binom{m_k - n_k}{l_k - n_k} \delta_{ml}^{(k)} \delta_{ln}^{(k)}$$

verschwindet immer für $m \not\equiv n\,(k)$, da nur über die l summiert wird, für die gleichzeitig $l \equiv m\,(k)$ und $l \equiv n\,(k)$ gilt. Ist $m \equiv n\,(k)$, so liefern genau die Werte $l = n,\ n+k,\ \ldots\ n+(m_k - n_k)\,k$ einen von 0 verschiedenen Beitrag zur Summe (2.1). Wir können dafür also schreiben

$$(-)^{n_k} \binom{m_k}{n_k} \sum_{\lambda=n_k}^{m_k} (-)^{\lambda} \binom{m_k - n_k}{\lambda - n_k} = \binom{m_k}{n_k} \sum_{\lambda=0}^{m_k - n_k} (-)^{\lambda} \binom{m_k - n_k}{\lambda} = \begin{cases} 1 & n_k = m_k, \\ 0 & n_k \neq m_k \end{cases}$$

w. z. b. w.

Für $k = 1$ ist $\delta_{mn}^{(1)} = 1$ für beliebige m und n. Da ferner immer $m_1 = m$ ist, erhalten wir $\delta^{(1)} = \left((-)^n \binom{m}{n}\right) = \delta$, die gewöhnliche Differenzenmatrix.

§3. Definition und Deutung der neuen Verfahren

Wir benutzen die in § 2 eingeführten Matrizen $\delta^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ zur Erzeugung von linearen Limitierungsverfahren, indem wir wie in der Hausdorffschen Theorie mit einer beliebigen Diagonalmatrix $\mu = (\mu_n)$ das Produkt $(M^{(k)}, \mu) = \delta^{(k)} \mu\, \delta^{(k)}$ bilden. Wieder soll auch für das durch die Matrix $(M^{(k)}, \mu)$ gegebene Verfahren dieselbe Bezeichnung $(M^{(k)}, \mu)$ verwendet werden. Zu jedem k erhalten wir eine Klasse von Limitierungsverfahren $\mathfrak{M}^{(k)}$, indem wir für μ alle Diagonalmatrizen zulassen. $\mathfrak{M}^{(1)}$ ist die Klasse der H-Verfahren. Bevor wir auf innere Eigenschaften der Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ und den Vergleich verschiedener Klassen eingehen, sollen die Matrixelemente $\mu_{mn}^{(k)}$ der Matrix $(M^{(k)}, \mu)$ berechnet werden.

Aus der Definition $(M^{(k)}, \mu) = \delta^{(k)} \mu\, \delta^{(k)}$ folgt:

$$\mu_{mn}^{(k)} = \sum_{l=n}^{m} (-)^{l_k} \binom{m_k}{l_k} \delta_{ml}^{(k)} \cdot \mu_l \cdot (-)^{n_k} \binom{l_k}{n_k} \delta_{ln}^{(k)}$$

und daraus wegen der Bedeutung der Symbole $\delta_{ml}^{(k)}$, $\delta_{ln}^{(k)}$

$$(3.1) \qquad \mu_{mn}^{(k)} = 0 \qquad \text{für } m \not\equiv n\,(k).$$

Ist $m \equiv n\,(k)$, so erhalten wir durch analoge Überlegungen wie in § 1

$$(3.2) \qquad \mu_{mn}^{(k)} = \binom{m_k}{n_k} \sum_{\lambda=0}^{m_k - n_k} (-)^{\lambda} \binom{m_k - n_k}{\lambda} \mu_{n+\lambda k}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\Delta_k^p \mu_q = \sum_{\lambda=0}^{p} (-)^{\lambda} \binom{p}{\lambda} \mu_{q+\lambda k}$ $(p, q \geqq 0)$, so kann (3.1) und (3.2) in der folgenden Form zusammengefaßt werden.

$$(3.3) \qquad \mu_{mn}^{(k)} = \binom{m_k}{n_k} \delta_{mn}^{(k)} \cdot \Delta_k^{m_k - n_k} \mu_n.$$

Da $\delta_{mn}^{(1)} = 1$ ist für alle m und n und stets $m_1 = m$ gilt, ist (3.3) für $k = 1$ identisch mit (1.1), der Darstellung des HAUSDORFF-Elementes.

Die Struktur der Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ erlaubt eine einfache Deutung. Für die Transformierte

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \mu_{mn}^{(k)} s_n$$

folgt nämlich aus (3.3)

$$t_m = \sum_{\nu=0}^{m_k} \mu_{m, m_k^* + \nu k}^{(k)} s_{m_k^* + \nu k}. \tag{3.4}$$

Betrachten wir alle m in derselben Restklasse $\varrho\ (0 \leq \varrho < k)$, d.h. alle m von der Form $\varrho + \lambda k$ $(\lambda = 0, 1, \ldots)$, so lautet (3.4)

$$t_{\varrho + \lambda k} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \mu_{\varrho + \lambda k, \varrho + \nu k}^{(k)} \cdot s_{\varrho + \nu k}. \tag{3.5}$$

Dies bedeutet aber, daß die Teilfolge $\{s_{\varrho + \nu k}\} = \{s_\nu^{(\varrho)}\}$ der Folge $\{s_n\}$ in die Teilfolge $\{t_{\varrho + \nu k}\} = \{t_\nu^{(\varrho)}\}$ der Folge $\{t_n\}$ transformiert wird. Das Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ enthält also k Teilverfahren T_ϱ, von denen jedes genau die Teilfolge $\{s_\nu^{(\varrho)}\}$ in die Teilfolge $\{t_\nu^{(\varrho)}\}$ transformiert. Wir behaupten: Die Teiltransformation T_ϱ ist ein HAUSDORFF-Verfahren; seine Diagonalmatrix lautet $\mu^{(\varrho)} = \{\mu_n^{(\varrho)}\} = \{\mu_{\varrho + nk}\}$.

Beweis. Aus (3.5) und (3.3) entnehmen wir

$$t_\lambda^{(\varrho)} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \mu_{\varrho + \lambda k, \varrho + \nu k}^{(k)} s_\nu^{(\varrho)} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} \Delta_k^{\lambda - \nu} \mu_{\varrho + \nu k} \cdot s_\nu^{(\varrho)}.$$

Da

$$\Delta_k^{\lambda - \nu} \mu_{\varrho + \nu k} = \sum_{\sigma=0}^{\lambda - \nu} (-)^\sigma \binom{\lambda - \nu}{\sigma} \mu_{\varrho + \nu k + \sigma k}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{\lambda - \nu} (-)^\sigma \binom{\lambda - \nu}{\sigma} \mu_{\nu + \sigma}^{(\varrho)} = \Delta^{\lambda - \nu} \mu_\nu^{(\varrho)} \quad (\mu_n^{(\varrho)} = \mu_{\varrho + nk})$$

ist, folgt

$$t_\lambda^{(\varrho)} = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\nu} \Delta^{\lambda - \nu} \mu_\nu^{(\varrho)} \cdot s_\nu^{(\varrho)}.$$

Dies ist aber gerade die zu der Matrix $\mu^{(\varrho)} = (\mu_n^{(\varrho)})$ gehörige H-Transformation. Wir formulieren diesen Sachverhalt in dem

Satz 9. Jedes Verfahren $M^{(k)} = (M^{(k)}, \mu)$ ist identisch mit k „gleichzeitig" angewandten HAUSDORFF-Verfahren $H_\varrho = (H, \mu^{(\varrho)})$ $(\mu^{(\varrho)} = (\mu_n^{(\varrho)}) = (\mu_{\varrho + nk}))$. Hierbei ist „gleichzeitig" in dem Sinn zu verstehen, daß jedes Teilverfahren H_ϱ genau auf die Teilfolge $\{s_n^{(\varrho)}\} = \{s_{\varrho + nk}\}$ anzuwenden ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k - 1)$. Wir werden das Verfahren $M^{(k)}$ unmißverständlich als „Produkt" der k Teilverfahren H_ϱ schreiben

$$M^{(k)} = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}.$$

§4. Regularitätskriterien

Wir untersuchen, für welche Diagonalmatrizen $\mu=(\mu_n)$ die Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ regulär sind.

Nach TOEPLITZ sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Regularität eines Verfahrens $t_m=\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}\, s_n$:

(I) $\gamma_m=\sum_{n=0}^{\infty}|c_{mn}|<K$ unabhängig von m.

(II) $c_{mn}\to 0$ für $m\to\infty$ und n beliebig.

(III) $c_m=\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}\to 1$ für $m\to\infty$.

Beginnen wir mit (III). Da für eine beliebige Folge $\{\lambda_m\}$ stets

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\Delta^{m-n}\lambda_n=\lambda_0$$

ist[3]), folgt für unsere Verfahren, wenn wir alle m in derselben Restklasse $\varrho\,(0, 1, \ldots, k-1)$ betrachten

$$c_m=\sum_{n=0}^{m}\mu_{mn}^{(k)}=\sum_{\lambda=0}^{m_k}\binom{m_k}{\lambda}\Delta_k^{m_k-\lambda}\mu_{\varrho+\lambda k}=\sum_{\lambda=0}^{m_k}\binom{m_k}{\lambda}\Delta^{m_k-\lambda}\mu_\lambda^{(\varrho)}=\mu_0^{(\varrho)}.$$

Setzen wir also $\mu_0^{(\varrho)}=1$ für $\varrho=0, 1, \ldots, k-1$, d.h. $\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_{k-1}=1$, so gilt offenbar für beliebiges m $c_m=1$, d.h. (III) ist erfüllt. Ist auch nur ein $\mu_0^{(\varrho)}\neq 1$, so gilt für die ganze Teilfolge $c_{\tilde{\varrho}+\lambda k}\neq 1$, d.h. c_m konvergiert nicht gegen 1. Die Bedingung $\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_{k-1}=1$ ist also äquivalent mit (III).

Wir nehmen nun an, daß (I) für das Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ erfüllt ist, d.h. gilt

$$\gamma_m=\sum_{\lambda=0}^{m_k}\binom{m_k}{\lambda}|\Delta_k^{m_k-\lambda}\mu_{m_k^*+\lambda k}|<K \tag{4.1}$$

unabhängig von m. Dann gilt dies insbesondere auch für alle m in derselben Restklasse ϱ

$$\gamma_{\varrho+\lambda k}=\sum_{\sigma=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\sigma}|\Delta_k^{\lambda-\sigma}\mu_{\varrho+\sigma k}|=\sum_{\sigma=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\sigma}|\Delta^{\lambda-\sigma}\mu_\sigma^{(\varrho)}|<K \tag{4.2}$$

für alle λ und $\varrho=0, 1, \ldots, k-1$. Dies ist aber nach HAUSDORFF[4]) äquivalent mit der Aussage: Die Folge $\{\mu_\lambda^{(\varrho)}\}$ ist Differenz zweier total monotoner Folgen

$$\{\mu_\lambda^{(\varrho)}\}=\{\alpha_\lambda^{(\varrho)}-\beta_\lambda^{(\varrho)}\},\quad \Delta^\varkappa\alpha_\lambda^{(\varrho)}\geq 0,\quad \Delta^\varkappa\beta_\lambda^{(\varrho)}\geq 0\qquad(\lambda, \varkappa=0, 1, \ldots).$$

Da ϱ eine beliebige der Zahlen $0, 1, \ldots, k-1$ war, gilt, wenn wir $\alpha_\lambda^{(\varrho)}=\alpha_{\varrho+\lambda k}$ und $\beta_\lambda^{(\varrho)}=\beta_{\varrho+\lambda k}$ setzen für die Folgen $\{\alpha_n\}$ und $\{\beta_n\}$:

$$\Delta_k^m\alpha_n\geq 0\quad\text{und}\quad\Delta_k^m\beta_n\geq 0\qquad m, n=0, 1, \ldots.$$

[3]) Vgl. 1., S. 252.

[4]) Vgl. 1., S. 253—254.

Nennen wir solche Folgen total monoton von der Ordnung k (total monoton von der Ordnung 1 $\sim$ total monoton), so folgt also aus (4.1): Die Folge $\{\mu_n\}$ ist Differenz zweier von der Ordnung k total monotoner Folgen $\{\mu_n\} = \{\alpha_n - \beta_n\}$. Ist umgekehrt $\{\mu_n\}$ Differenz zweier von der Ordnung k total monotoner Folgen $\{\alpha_n\}$ und $\{\beta_n\}$, d.h. jede der Folgen $\{\alpha_\lambda^{(\varrho)}\}$ und $\{\beta_\lambda^{(\varrho)}\}$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$ total monoton, so gilt nach dem eben erwähnten Satz von HAUSDORFF für die Folge $\{\mu_\lambda^{(\varrho)}\} = \{\alpha_\lambda^{(\varrho)} - \beta_\lambda^{(\varrho)}\}$ die Ungleichung (4.2) mit einer Konstanten K_ϱ. Wählen wir $K = \max_{\varrho=0}^{k-1} \{K_\varrho\}$, so folgt (4.1) für alle m mit derselben Konstanten K. Die TOEPLITZsche Bedingung (I) ist also für unsere Verfahren äquivalent mit der Bedingung: Die Folge $\{\mu_n\}$ ist Differenz zweier von der Ordnung k total monotoner Folgen.

Die Bedingung (II) lautet hier

$$c_{m\,n} = \mu_{m\,n}^{(k)} = \binom{m_k}{n_k} \delta_{m\,n}^{(k)} \Delta_k^{m_k - n_k} \mu_n \to 0 \quad \text{für } m \to \infty \text{ und } n \text{ beliebig,}$$

oder für eine beliebige Restklasse ϱ

$$(4.3)\quad c_{\varrho+\lambda k,\,\varrho+\nu k} = \mu_{\varrho+\lambda k,\,\varrho+\nu k}^{(k)} = \binom{\lambda}{\nu} \Delta^{\lambda-\nu} \mu_\nu^{(\varrho)} \to 0 \quad \text{für } \lambda \to \infty \text{ und } \nu \text{ beliebig.}$$

Nun folgt aber (4.3) nach einem bekannten Satz von HAUSDORFF[5]) schon aus

$$\sum_{\sigma=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\sigma} |\, \Delta^{\lambda-\sigma} \mu_\sigma^{(\varrho)} \,| < K$$

für alle $\nu > 0$, so daß also unter Voraussetzung der Gültigkeit von (4.1) die Bedingung (II) äquivalent mit den k Bedingungen ist

$$\Delta^\lambda \mu_0^{(\varrho)} = \Delta_k^\lambda \mu_\varrho \to 0 \quad \text{für } \lambda \to \infty \text{ und } \varrho = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Wir können diese Ergebnisse zu dem Kriterium zusammenfassen

Satz 10. Das Verfahren $M^{(k)} = (M^{(k)}, \mu)$ ist genau dann regulär, wenn

(I') die Folge $\{\mu_n\}$ Differenz zweier von der Ordnung k total monotoner Folgen ist,

(II') $\mu_\varrho = 1$ ist und
(III') $\Delta_k^m \mu_\varrho \to 0$ für $m \to \infty$ $\Big\}$ $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$

Da die Aussage: $\{\mu_n\}$ ist Differenz zweier von der Ordnung k total monotoner Folgen gleichbedeutend damit ist, daß jede der k Teilfolgen $\{\mu_n^{(\varrho)}\}$ Differenz zweier total monotoner Folgen ist, und da ferner $\{\mu_n^{(\varrho)}\}$ gerade die zu dem ϱ-ten Teilverfahren $H_\varrho = (H, \mu^{(\varrho)})$ gehörige Folge ist (Satz 7), ist das obige Kriterium nach Satz 9 äquivalent mit der folgenden Fassung

Satz 11. Das Verfahren $M^{(k)} = H_0 \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{k-1}$ ist genau dann regulär, wenn jedes der k Teilverfahren H_ϱ regulär ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$.

[5]) Vgl. 1., S. 255.

§5. Bemerkung zum Momentenproblem

Ist das Verfahren $M^{(k)} = (M^{(k)}, \mu) = H_0 \times \cdots \times H_{k-1}$ regulär, so auch jedes Teilverfahren $H_\varrho = (H, \mu^{(\varrho)})$ (Satz 11). Dies ist aber nach Satz 7 äquivalent mit der Aussage: Die Folge $\{\mu_n^{(\varrho)}\} = \{\mu_{\varrho+nk}\}$ ist eine reguläre Momentenfolge. Es existiert also (unter der Voraussetzung $M^{(k)}$ regulär) auf $[0, 1]$ für jedes ϱ eine Funktion χ_ϱ von beschränkter Schwankung und normalen Unstetigkeiten, die den Bedingungen $\chi_\varrho(1) = 1$, $\chi_\varrho(+0) = \chi_\varrho(0) = 0$ genügt und die Darstellung erlaubt

$$\mu_n^{(\varrho)} = \int_0^1 x^n \, d\,\chi_\varrho \qquad \varrho = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Unter Benutzung des schon mehrfach benutzten Symbols $\delta_{mn}^{(k)}$ können wir mit diesen Funktionen χ_ϱ die Folge $\{\mu_n\}$ in der Form darstellen

$$\mu_n = \sum_{\varrho=0}^{k-1} \delta_{n\,\varrho}^{(k)} \int_0^1 x^{n_k} \, d\,\chi_\varrho .$$

Nennen wir eine Folge $\{\mu_n\}$ für welche ein solcher Satz von k Funktionen χ_ϱ gefunden werden kann, eine reguläre Momentenfolge der Ordnung k, so können wir unser Regularitätskriterium auch in der Form aussprechen.

Satz 12. Das Verfahren $M^{(k)} = (M^{(k)}, \mu)$ ist genau dann regulär, wenn $\{\mu_n\}$ eine reguläre Momentenfolge der Ordnung k ist.

§6. Bestimmung und Eigenschaften der Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$

Wir betrachten für ein beliebiges fest gewähltes k die Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ aller Verfahren $(M^{(k)}, \mu) = \delta^{(k)}\,\mu\,\delta^{(k)}$ und beweisen als erstes

Satz 13. Je zwei Verfahren der Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ sind vertauschbar.

Beweis. Sind $\mu = (\mu_n)$ und $\mu' = (\mu'_n)$ zwei beliebige Diagonalmatrizen, so gilt wegen der Vertauschbarkeit zweier Diagonalmatrizen und der Beziehung $(\delta^{(k)})^2 = \mathfrak{E}$

$$\begin{aligned}(M^{(k)}, \mu)\,(M^{(k)}, \mu') &= \delta^{(k)}\mu\,\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)}\mu'\,\delta^{(k)} = \delta^{(k)}\mu\,\mu'\,\delta^{(k)} \\ &= \delta^{(k)}\mu'\,\mu\,\delta^{(k)} = \delta^{(k)}\mu'\,\delta^{(k)} \cdot \delta^{(k)}\,\mu\,\delta^{(k)} = (M^{(k)}, \mu')\,(M^{(k)}, \mu).\end{aligned}$$

Insbesondere sind alle Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ mit dem Verfahren $C^{(k)} = (M^{(k)}, \mu^*)$ vertauschbar, wo $\mu_n^* = \frac{1}{n+1}$ ist. Wir bezeichnen die zugehörigen Teiltransformationen T_ϱ mit $C_\varrho^{(k)}$ und setzen also $C^{(k)} = C_0^{(k)} \times C_1^{(k)} \times \cdots \times C_{k-1}^{(k)}$. Als nächstes wollen wir nun beweisen, daß die Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ in dem Sinn „abgeschlossen" ist, daß nicht nur alle Verfahren dieser Klasse mit $C^{(k)}$ vertauschbar sind, sondern auch umgekehrt jedes lineare Verfahren $A: t_m = \sum_{n=0}^{m} a_{mn}\, s_n$, das mit $C^{(k)}$ vertauschbar ist, schon Element der Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ ist. Dazu zeigen wir zuerst, daß aus der Voraussetzung der Vertauschbarkeit mit $C^{(k)} = (c_{mn}^{(k)})$

$$(a_{mn})\,(c_{mn}^{(k)}) = (c_{mn}^{(k)})\,(a_{mn}) \tag{6.1}$$

die folgende Struktureigenschaft über die Matrix (a_{mn}) folgt:

$$a_{mn} = 0 \qquad \text{für } m \not\equiv n(k). \tag{6.2}$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß die natürlichen Zahlen m und n $\left(m \not\equiv n(k)\right)$ den Bedingungen genügen $m-k<n<m$. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für (6.1) (wir setzen für $n<0$ $a_{mn}=0$)

$$\sum_{\substack{i=n \\ i\equiv n(k)}}^{m} a_{mi}\, c_{in}^{(k)} = \sum_{\substack{i=n \\ i\equiv m(k)}}^{m} c_{mi}^{(k)}\, a_{in} \tag{6.3}$$

und damit $a_{mn} c_{nn}^{(k)} = c_{mm}^{(k)} a_{mn}$, d.h. aber $a_{mn}=0$, da ja nach Wahl des Verfahrens $C^{(k)}$ für $n \neq m$ $c_{nn}^{(k)} \neq c_{mm}^{(k)}$ ist.

Wir machen nun die Induktionsannahme, daß für alle natürlichen Zahlen m und n $\left(m \not\equiv n(k)\right)$ mit $m-\nu\cdot k<n<m$ das Element $a_{mn}=0$ ist (ν natürliche Zahl).

Behauptung. Dies gilt dann auch für alle natürlichen Zahlen m und n $\left(m \not\equiv n(k)\right)$ mit $m-(\nu+1)k<n<m$.

Aus (6.1) entnehmen wir

$$a_{mn} c_{nn}^{(k)} + \sum_{\substack{i=n+k \\ i\equiv n(k)}}^{m} a_{mi}\, c_{in}^{(k)} = c_{mm}^{(k)} a_{mn} + \sum_{\substack{i=n \\ i\equiv m(k)}}^{m-k} c_{mi}^{(k)} \cdot a_{in}.$$

Da auf beiden Seiten unter den Summenzeichen nur a_{mn} auftreten, die nach Induktionsvoraussetzung 0 sind, folgt $a_{mn}\cdot c_{nn}^{(k)} = c_{mm}^{(k)} a_{mn}$ und hieraus wieder wegen der Wahl von $C^{(k)}$ $a_{mn}=0$. Damit ist (6.2) allgemein bewiesen.

Das Verfahren A besitzt also dieselbe Struktur wie jedes Verfahren der Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$.

$$t_m = \sum_{\lambda=0}^{m_k} a_{m,\, m_k^* + \lambda k} \cdot s_{m_k^* + \lambda k}.$$

Hieraus schließen wir, daß sich A wieder als Produkt von k Teilverfahren A_ϱ schreiben läßt, wobei A_ϱ die Folge $\{s_n^{(\varrho)}\} = \{s_{\varrho+nk}\}$ in die Teilfolge $\{t_n^{(\varrho)}\} = \{t_{\varrho+nk}\}$ transformiert:

$$A = A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_{k-1}.$$

Dann ist aber, wie man sofort aus der Struktur der beiden Matrizen $C^{(k)}$ und A folgert, die Vertauschbarkeit von $C^{(k)}$ und A äquivalent mit der Vertauschbarkeit jedes der Teilverfahren $C_\varrho^{(k)}$ mit A_ϱ ($\varrho = 0, 1, \ldots, k-1$). Nach einem Satz von HAUSDORFF[6]) ist dann schon A_ϱ ein H-Verfahren, d.h. es existiert eine Diagonalmatrix $\mu^{(\varrho)} = (\mu_n^{(\varrho)})$, so daß A_ϱ in der Form $A_\varrho = \delta \mu^{(\varrho)} \delta$ geschrieben werden kann. Hieraus folgt aber, wenn wir $\mu_n^{(\varrho)} = \mu_{\varrho+nk}$ und $\mu = (\mu_n)$ setzen, für das Gesamtverfahren A die Darstellung $A = \delta^{(k)}\, \mu\, \delta^{(k)}$, d.h. $A \in \mathfrak{M}^{(k)}$. Es gilt also

[6]) Vgl. 1., S. 249.

Satz 14. Die Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ besteht aus allen linearen Verfahren, die mit $C^{(k)}$ vertauschbar sind.

Als eine weitere wichtige Eigenschaft der Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ beweisen wir

Satz 15. Alle Verfahren einer Klasse $\mathfrak{M}^{(k)}$ sind verträglich.

Beweis. Die Aussage, daß die beiden Verfahren $(M^{(k)}, \mu) = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}$ und $(M^{(k)}, \mu') = H_0' \times H_1' \times \cdots \times H_{k-1}'$ die Folge $\{s_n\}$ zu dem Grenzwert s bzw. s' limitieren, bedeutet: Jede der k Teilfolgen $\{s_n^{(\varrho)}\}$ wird von H_ϱ zu s bzw. von H_ϱ' zu s' limitiert. Da je zwei H-Verfahren verträglich sind, folgt $s = s'$.

§7. Vergleich von verschiedenen Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$

Eine interessante Frage[6']) ist naturgemäß die nach dem Durchschnitt von verschiedenen Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$. Sind zwei Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ und $\mathfrak{M}^{(k')}$ für $k \neq k'$ vielleicht sogar fremd? Wir zeigen, daß die Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ und $\mathfrak{M}^{(k')}$ nur gewisse triviale Verfahren gemeinsam haben, die durch Diagonalmatrizen gegeben werden.

Die Aussage $A \in \mathfrak{M}^{(k)}$ und $A \in \mathfrak{M}^{(k')}$ bedeutet die folgenden Möglichkeiten der Darstellung von A

$$A = \delta^{(k)}\, \mu\, \delta^{(k)} \quad \text{und} \quad A = \delta^{(k')}\, \mu'\, \delta^{(k')}, \tag{7.1}$$

wobei μ und μ' eventuell verschiedene Diagonalmatrizen sind. Da aber nach (3.3) für die Diagonalglieder $a_{n\,n} = \mu_n = \mu_n'$ folgt, gilt $\mu = \mu'$. Allgemein zieht (7.1) nach (3.3) die Gleichung nach sich

$$\binom{m_k}{n_k} \Delta_k^{m_k - n_k} \mu_n\, \delta_{m\,n}^{(k)} = \binom{m_{k'}}{n_{k'}} \Delta_{k'}^{m_{k'} - n_{k'}} \mu_n \cdot \delta_{m\,n}^{(k')}. \tag{7.2}$$

Ist nun z.B. $k < k'$, so wählen wir für alle $m \geqq k$ $n = m - k$. Für diese m und n ist $\delta_{m\,n}^{(k')} = 0$, d.h. wir haben

$$\binom{m_k}{m_k - 1} \Delta_k^1\, \mu_{m-k} = 0$$

und daraus

$$m_k \sum_{\lambda=0}^{1} (-)^\lambda \binom{1}{\lambda} \mu_{m-k+\lambda\,k} = m_k (\mu_{m-k} - \mu_m) = 0,$$

d.h. $\mu_m = \mu_{m-k}$. Dies bedeutet aber, daß jede der k Folgen $\{\mu_\lambda^{(\varrho)}\} = \{\mu_{\varrho+\lambda\,k}\}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$ konstant ist. Dann gilt aber schon für alle m und n

$$a_{m\,n} = \binom{m_k}{n_k} \delta_{m\,n}^{(k)} \Delta_k^{m_k - n_k} \mu_n = \binom{m_k}{n_k} \delta_{m\,n}^{(k)} \sum_{\lambda=0}^{m_k - n_k} (-)^\lambda \binom{m_k - n_k}{\lambda} \mu_{n+\lambda\,k}$$

$$= \binom{m_k}{n_k} \delta_{m\,n}^{(k)} \cdot \mu_\varrho \cdot \delta_{m_k\,n_k} = \begin{cases} \mu_\varrho & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

[6']) Ein Problem dieser Art ist von E. Ullrich für Haussdorff- und Nörlund-Verfahren behandelt worden. Math. Z. 25 (1926), 382—387.

d.h. A ist eine Diagonalmatrix. Da jetzt die linke Seite von (7.2) immer 0 ist, wenn $m \neq n$, folgt genau so als zweite Strukturbedingung der Folge $\{\mu_n\}$: $\mu_{\varrho+\lambda k'} = \mu_\varrho$ $(\lambda = 0, 1, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k'-1)$. Liegt umgekehrt eine Diagonalmatrix $A = (\mu_n)$ vor, für welche $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+\lambda k}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$ bzw. $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+\lambda k'}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k'-1)$ ist, so gilt sowohl $A = \delta^{(k)}\,\mu\,\delta^{(k)}$ als auch $A = \delta^{(k')}\,\mu\,\delta^{(k')}$ mit $\mu = (\mu_n)$, d.h. es gilt $A \in \mathfrak{M}^{(k)}$ und $A \in \mathfrak{M}^{(k')}$. Damit folgt

Satz 16. Die Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ und $\mathfrak{M}^{(k')}$ sind für $k \neq k'$ fremd bis auf gewisse triviale Verfahren, deren Matrizen Diagonalmatrizen $\mu = (\mu_n)$ sind. Die Folgen $\{\mu_n\}$ müssen dabei noch zusätzlich den Strukturbedingungen $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+\lambda k}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$ und $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+\lambda k'}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k'-1)$ genügen.

§8. Die Unterklassen $\mathfrak{R}^{(k)}$ der regulären Verfahren von $\mathfrak{M}^{(k)}$

Wir betrachten jetzt die Unterklassen $\mathfrak{R}^{(k)}$ der regulären Verfahren von $\mathfrak{M}^{(k)}$. Über den Durchschnitt zweier Unterklassen $\mathfrak{R}^{(k)}$ und $\mathfrak{R}^{(k')}$ können wir sogar beweisen

Satz 17. Die Unterklassen $\mathfrak{R}^{(k)}$ und $\mathfrak{R}^{(k')}$ $(k \neq k')$ haben genau ein Verfahren gemeinsam, nämlich das Einheitsverfahren.

Beweis. Nach Satz 16 ist ein gemeinsames Verfahren notwendig ein Diagonalverfahren (μ_n), dessen Diagonalfolge $\{\mu_n\}$ noch zusätzlich den Bedingungen genügen muß: $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+\lambda k}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots;\ \varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$. Da nach dem Regularitätskriterium Satz 10 für reguläre Verfahren

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_{k-1} = 1$$

ist, folgt hieraus $\mu_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ w. z. b. w.

Über Vergleichbarkeit von Verfahren einer Klasse beweisen wir

Satz 18. Genau dann ist $(M^{(k)}, \mu) = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \in \mathfrak{R}^{(k)}$ stärker als $(M^{(k)}, \mu') = H_0' \times H_1' \times \cdots \times H_{k-1}' \in \mathfrak{R}^{(k)}$, wenn jedes der Teilverfahren H_ϱ stärker als das entsprechende Teilverfahren H_ϱ' ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Beweis. Die Beziehung $(M^{(k)}, \mu) \geqq (M^{(k)}, \mu')$ bedeutet, daß jede Folge $\{s_n\}$, die von $(M^{(k)}, \mu')$ limitiert wird, auch von $(M^{(k)}, \mu)$ limitiert wird. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß jede Teilfolge $\{s_n^{(\varrho)}\}$, die von H_ϱ' limitiert wird, auch von H_ϱ limitiert wird, d.h. daß $H_\varrho \geqq H_\varrho'$ ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$. Die Umkehrung ist evident.

Korollar. Die Verfahren $(M^{(k)}, \mu) \in \mathfrak{R}^{(k)}$ und $(M^{(k)}, \mu') \in \mathfrak{R}^{(k)}$ sind genau dann äquivalent, wenn jedes Teilverfahren H_ϱ mit H_ϱ' äquivalent ist $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Gilt für die Matrizen $\mu = (\mu_n)$ und $\mu' = (\mu_n')$ $\mu_n \neq 0$, $\mu_n' \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so erkennen wir die Gültigkeit von

Satz 19. Das Verfahren $(M^{(k)}, \mu) \in \mathfrak{R}^{(k)}$ ist genau dann stärker, als das Verfahren $(M^{(k)}, \mu') \in \mathfrak{R}^{(k)}$, wenn die Folge $\left\{\frac{\mu_n}{\mu_n'}\right\}$ eine reguläre Momentenfolge der Ordnung k ist.

Beweis. $(M^{(k)}, \mu) \geqq (M^{(k)}, \mu')$ bedeutet $H_\varrho \geqq H'_\varrho$ $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$. Nach Satz 7 ist dann $\left\{ \begin{matrix} \mu_n^{(\varrho)} \\ \mu'^{(\varrho)}_n \end{matrix} \right\}$ eine reguläre Momentenfolge, woraus nach Definition einer regulären Momentenfolge der Ordnung k die Behauptung folgt.

§9. Summation der geometrischen Reihe in CASSINIschen Ovalen und analytische Fortsetzung

Sehr oft können aus dem Summationsgebiet der geometrischen Reihe in bezug auf ein Limitierungsverfahren A Aussagen über die Güte, d.h. die Größe des Wirkfeldes von A, gemacht werden. Wir werden sehen, daß wir auch hier die geometrische Reihe in sehr bequemer Weise zur Entscheidung von Vergleichbarkeit bzw. Nichtvergleichbarkeit von Verfahren aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ heranziehen können. Ferner wird sich für unsere Verfahren aus einer besonderen Eigenschaft des Summationsgebietes der geometrischen Reihe eine interessante Folgerung für die EULERschen Summierungspolygone ergeben.

Wir benutzen zur Berechnung des Summationsgebietes der geometrischen Reihe in bezug auf ein Verfahren $(M^{(k)}, \mu) = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}$ einen Satz von AGNEW über H-Verfahren[7]). Dieser Satz lautet:

Ist $H(\chi)$ ein beliebiges reguläres H-Verfahren und verstehen wir unter r die untere Grenze aller r', für welche gilt $\chi(t) = 1$ wenn $r' \leqq t \leqq 1$, so wird die geometrische Reihe $\sum_0^\infty z^n$ durch $H(\chi)$ in jedem inneren Punkt des Kreises $\left| z - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right| = \frac{1}{r}$ zu $\frac{1}{1-z}$ summiert; dagegen ist $\sum_{\nu=0}^\infty z^\nu$ in keinem äußeren Punkt dieses Kreises durch $H(\chi)$ summierbar.

Alle H-Verfahren summieren also die geometrische Reihe in Kreisen, die durch $z = 1$ gehen und deren Mittelpunkt auf der negativen reellen Achse liegt. Wir nennen mit AGNEW r die Ordnung des H-Verfahrens (H, χ) und den Kreis $\left| z - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right| = \frac{1}{r}$ den Summierungskreis von (H, χ).

Wir skizzieren für eine spätere Anwendung den Beweis von AGNEW. Die (H, χ)-Transformierte der Folge $\{s_n\}$ lautet nach (1.2) in Integraldarstellung

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} h_{m\,n}\, s_n = \int_0^1 \left\{ \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n (1-x)^{m-n}\, s_n \right\} d\chi .$$

Damit erhält man für die Teilsummen der geometrischen Reihe $s_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n$

$$t_m(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} \int_0^1 [1 + t(z-1)]^n \, d\chi .$$

[7]) AGNEW, R. P.: Analytic Extension by Hausdorff Methods. Trans. Amer. Math. Soc. **52**, 217—237 (1942).

AGNEW zeigt nun, daß die Funktion $f_n(z) = \int_0^1 [1+t(z-1)]^n d\chi$ [die (H, χ)-Transformierte der Folge $\{z^n\}$] für jeden Punkt innerhalb des Kreises $z-\left(1-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}$ gegen 0 konvergiert, für jeden Punkt außerhalb unbeschränkt ist.

Nach § 5 gilt für die Folge $\{\mu_n\}$ eines beliebigen regulären Verfahrens $(M^{(k)}, \mu)$ die Momentendarstellung

$$\mu_n = \sum_{\varrho=0}^{k-1} \delta_{n\varrho}^{(k)} \int_0^1 x^{n_k} d\chi_\varrho,$$

wo χ_ϱ zu der regulären Momentenfolge $\{\mu_{\varrho+n\,k}\} = \{\mu_n^{(\varrho)}\}$ gehört ($\varrho = 0, 1, \ldots, k-1$). Das allgemeine Matrixelement schreibt sich dann in der Form

$$\begin{aligned}
\mu_{mn}^{(k)} &= \binom{m_k}{n_k} \Delta_k^{m_k-n_k} \mu_n \cdot \delta_{mn}^{(k)} \\
&= \binom{m_k}{n_k} \delta_{mn}^{(k)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{m_k-n_k} (-)^\lambda \binom{m_k-n_k}{\lambda} \mu_{n+\lambda\,k} \\
&= \binom{m_k}{n_k} \delta_{nm}^{(k)} \sum_{\lambda=0}^{m_k-n_k} (-)^\lambda \binom{m_k-n_k}{\lambda} \cdot \sum_{\varrho=0}^{k-1} \delta_{n+\lambda k,\varrho}^{(k)} \int_0^1 x^{n_k+\lambda} d\chi_\varrho \\
&= \binom{m_k}{n_k} \delta_{mn}^{(k)} \int_0^1 x^{n_k} (1-x)^{m_k-n_k} d\chi_{n_k^*}.
\end{aligned}$$

Angewandt auf die Teilsumme der geometrischen Reihe $s_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
t_m(z) &= \sum_{n=0}^{m} \mu_{mn}^{(k)} s_n(z) \\
&= \frac{1}{1-z} \int_0^1 (1-x)^{m_k} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{m_k} \binom{m_k}{\lambda} \frac{x^\lambda}{(1-x)^\lambda} \right\} d\chi_{m_k^*} \\
&\qquad - \frac{z^{m_k^*+1}}{1-z} \cdot \int_0^1 (1-x)^{m_k} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{m_k} \binom{m_k}{\lambda} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\lambda (z^k)^\lambda \right\} d\chi_{m_k^*} \\
&= \frac{1}{1-z} - \frac{z^{m_k^*+1}}{1-z} \int_0^1 \left(1 - x(1-z^k)\right)^{m_k} d\chi_{m_k^*}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun für sich die k Teilfolgen $\{t_m^{(\varrho)}(z)\} = \{t_{\varrho+m\,k}(z)\}$ ($\varrho = 0, 1, \ldots, k-1$), für welche gilt

$$t_m^{(\varrho)}(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{\varrho+1}}{1-z} \int_0^1 [1 - x(1-z^k)]^m d\chi_\varrho.$$

Setzen wir für den Augenblick $z^k = \zeta$, so ist

$$R_m^{(\varrho)}(z) = \int_0^1 [1 - x(1 - z^k)]^m \, d\chi_\varrho = \int_0^1 [1 - x(1 - \zeta)]^m \, d\chi_\varrho = t_m^{(\varrho)}(\zeta)$$

die (H, χ_ϱ)-Transformierte der Folge $\{\zeta^n\}$. Diese konvergiert nach AGNEW, wenn r_ϱ die Ordnung von (H, χ_ϱ) bezeichnet, in jedem Punkt innerhalb des Kreises $\zeta - \left(1 - \frac{1}{r_\varrho}\right) = \frac{1}{r_\varrho}$ gegen 0 und ist unbeschränkt in jedem Punkt außerhalb. Bezeichnen wir $r = \underset{\varrho = 0}{\overset{k-1}{\mathrm{Max}}} \{r_\varrho\}$ als die Ordnung des Verfahrens $(M^{(k)}, \mu)$ so konvergiert im Inneren des Gebietes $\zeta - \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$ jede der k Teilfolgen $\{t_m^{(\varrho)}(z)\}$ zu $\frac{1}{1-z}$; in jedem Punkt außerhalb bleibt dagegen wenigstens eine dieser Folgen unbeschränkt. Damit haben wir bewiesen:

Satz 20. Besitzt das Verfahren $(M^{(k)}, \mu) = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}$ $\left(k \geq 2;\ H_\varrho = (H, \mu_n^{(\varrho)}) = (H, \chi_\varrho)\right)$ die Ordnung r, so summiert es die geometrische Reihe in jedem Punkt innerhalb des CASSINIschen Ovals $\left| z^k - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right| = \frac{1}{r}$ zu $\frac{1}{1-z}$ dagegen in keinem Punkt außerhalb.

Als besonders erwähnenswert heben wir noch die Tatsache hervor, daß es in den Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ $(k \geq 2)$ Verfahren gibt, die die geometrische Reihe in Punkten der rechten Halbebene $\Re(z) > 1$ summieren. Dies ist für kein HAUSDORFF-Verfahren der Fall.

Zur Behandlung der analytischen Fortsetzung von Potenzreihen stützen wir uns auf einen Satz von BOREL-LORENTZ-OKADA[8]). Wir betrachten ein beliebiges Verfahren $A: t_m = \sum a_{mn} s_n$, das die geometrische Reihe innerhalb[9]) eines offenen Sterngebietes[10]) R', das den Einheitskreis enthält, gleichmäßig zu $\frac{1}{1-z}$ summiert. Mit R bezeichnen wir die aus $C(R')$ (Komplement von R') durch die Stürzung $w = \frac{1}{z}$ erhaltene Menge. Diese ist nach unseren obigen Voraussetzungen über R' ein abgeschlossenes Sterngebiet und enthält das Intervall $[0, 1]$. Ist nun B eine beliebige Menge, die 0 enthält, $c \cdot C$ für eine beliebige Menge C die Menge aller Punkte cz mit $z \in C$ $(c \neq 0)$ und bezeichnen wir mit $A(B)$ das Gebiet, in dem die Potenzreihe $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$ einer jeden, in B regulär analytischen Funktion $f(z)$ zu $f(z)$ summiert wird, so gilt

1. $A(B) = \bigcap_{c \notin B} cR' = \bigcup_{cR \subseteq B} \{c\}$.

2. $A(B)$ ist sternförmig.

3. Die Potenzreihe einer jeden in B analytischen Funktion $f(z)$ ist innerhalb B gleichmäßig zu $f(z)$ summierbar.

---

[8]) LORENTZ, G. G.: Bernstein Polynomials, S. 117—120. University of Toronto Press 1953.

[9]) Innerhalb eines Gebietes bedeutet auf jeder abgeschlossenen Teilmenge.

[10]) Ein Sterngebiet enthält den 0-Punkt und auf jedem Strahl von 0 aus genau einen Randpunkt.

Dieser Satz darf offenbar für unsere Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ $(k \geq 2)$ angewandt werden. Denn R' ist in diesem Fall ein CASSINIsches Oval, das den Einheitskreis enthält und sternförmig ist. Ferner strebt nach AGNEW die Funktion $f_n^{(\varrho)}(\zeta)$ innerhalb des zu (H, χ_ϱ) gehörigen Limitierungskreises gleichmäßig gegen 0 und damit die Funktionenfolge $t_m(z)$ innerhalb des zu dem Durchschnitt dieser Limitierungskreise $(\varrho = 0, 1, \ldots, k-1)$ gehörigen CASSINIschen Ovals gleichmäßig gegen $\frac{1}{1-z}$.

Eine interessante Beobachtung ergibt sich aus der Bemerkung, daß das CASSINIsche Oval $\left|z^k - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right| = \frac{1}{r}$ für gerade k nullpunktsymmetrisch ist. Da die Stürzung $w = \frac{1}{z}$ ein nullpunktsymmetrisches Gebiet wieder in ein nullpunktsymmetrisches Gebiet überführt, erhält man aus der Definition von $A(B)$

Satz 21. Ist k gerade und B eine beliebige vorgegebene Menge die den Nullpunkt enthält, so summiert jedes Verfahren $(M^{(k)}, \mu)$ die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ aller in B regulär analytischen Funktionen $f(z)$ in einem sternförmigen, nullpunktsymmetrischen Gebiet.

§10. Vergleich von Verfahren aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$

Besonders interessante Fragen ergeben sich bei der Betrachtung und dem Vergleich von Verfahren aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{M}^{(k)}$. Sind z.B. zwei Verfahren aus verschiedenen Klassen immer verträglich oder nie verträglich? Gibt es darunter vergleichbare Verfahren oder nicht? Diese Fragen sind noch offen. Wir zeigen nur an einem Beispiel die Existenz von abzählbar vielen Verfahren aus verschiedenen Klassen, die paarweise unvergleichbar sind.

Wir legen ein beliebiges reguläres HAUSDORFF-Verfahren $(H, \chi^*) = H^*$ mit einer Ordnung $r^* < 1$ zugrunde (d.h. H^* summiert die geometrische Reihe in einem Kreise, der den Einheitskreis als echte Teilmenge enthält) und bilden die Verfahren

$$M^{*(k)} = \underbrace{H^* \times H^* \times \cdots \times H^*}_{k\text{-mal}}.$$

Natürlich ist $M^{*(k)} \in \mathfrak{R}^{(k)}$. Für diese abzählbar vielen Verfahren beweisen wir:

Satz 22. Von den Verfahren $M^{*(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist keines stärker oder schwächer als ein anderes. Sie sind paarweise unvergleichbar.

Der Beweis ergibt sich unter Heranziehung unserer Ergebnisse über die Summierung der geometrischen Reihe. Nach Satz 20 summiert $M^{*(k)}$ die geometrische Reihe in jedem Punkt des durch die Kurve $z^k - \left(1 - \frac{1}{r^*}\right) = \frac{1}{r^*}$ begrenzten Gebietes $\mathfrak{L}_k$. Wir zeigen nun, daß es zu jedem k Punkte von $\mathfrak{L}_k$ gibt, die in keinem anderen $\mathfrak{L}_{k'}$ liegen $(k' \neq k)$.

Das CASSINIsche Oval $z^k-\left(1-\frac{1}{r^*}\right)=\frac{1}{r^*}$ $(k\geqq 2)$ entsteht durch die konforme Abbildung $z=\sqrt[k]{\zeta}$ aus dem Kreis $\zeta-\left(1-\frac{1}{r^*}\right)=\frac{1}{r^*}$. Dieser Kreis mit dem Mittelpunkt $1-\frac{1}{r^*}$ auf der negativen reellen Achse genügt in Polarkoordinaten (r,φ) der Gleichung

$$r=r^*(\varphi)=-\left(\frac{1}{r^*}-1\right)\cos\varphi+\sqrt{\left(\frac{1}{r^*}-1\right)^2\cos^2\varphi+\frac{2}{r^*}-1}.$$

Das CASSINIsche Oval $z^k-\left(1-\frac{1}{r^*}\right)=\frac{1}{r^*}$ besitzt demnach in Polarkoordinaten die Darstellung

$$r=r^k(\varphi)=\sqrt[k]{r^*(k\varphi)}=\sqrt[k]{-\left(\frac{1}{r^*}-1\right)\cos k\varphi+\sqrt{\left(\frac{1}{r^*}-1\right)^2\cos^2\varphi+\frac{2}{r^*}-1}}.$$

Wir betrachten $r^{(k)}(\varphi)$ zuerst für kleine φ und benutzen die TAYLOR-Entwicklungen für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $(1+x)^\alpha$. Aus $\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+o(\varphi^3)$ und $\sin\varphi=\varphi+o(\varphi^2)$, $\sin^2\varphi=\varphi^2+o(\varphi^3)$ folgt mit $\frac{1}{r^*}=R$

$$\text{(10.1)}\quad\begin{cases} r^*(\varphi)=-(R-1)\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+o(\varphi^3)\right)+R\sqrt{1-\left(\frac{R-1}{R}\right)^2(\varphi^2+o(\varphi^3)} \\ \quad=-(R-1)\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+o(\varphi^3)\right)+R\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-1}{R}\right)^2\{\varphi^2+o(\varphi^3)\}+\right. \\ \quad\left.+o\left(\varphi^2+o(\varphi^3)\right)\right] \\ \quad=1+\frac{R-1}{2R}\varphi^2+o(\varphi^2) \end{cases}$$

und hieraus durch nochmalige Anwendung der binomischen Reihe

$$\text{(10.2)}\qquad r^{(k)}(\varphi)=1+\frac{R-1}{2R}\cdot k\cdot\varphi^2+o(\varphi^2).$$

Ist nun $k'>k$, so ist für φ genügend klein $r^{(k')}(\varphi)>r^{(k)}(\varphi)$. Denn setzen wir in diese Ungleichung die Entwicklung (10.2) ein, so folgt

$$1+\frac{R-1}{2R}k'\cdot\varphi^2+o(\varphi^2)>1+\frac{R-1}{2R}\cdot k\varphi^2+o(\varphi^2)$$

und hieraus $k'+o(1)>k+o(1)$, eine Ungleichung, die für genügend kleine φ sicher erfüllt ist. Damit haben wir bewiesen, daß es für $k'>k$ Punkte gibt, die nicht in $\mathfrak{L}_k$ wohl aber in $\mathfrak{L}_{k'}$ liegen. Wir zeigen aber auch das Umgekehrte: Für $k'>k$ gibt es Punkte, die in $\mathfrak{L}_k$ aber nicht in $\mathfrak{L}_{k'}$ liegen, mit anderen Worten: Es gibt Werte $\overline{\varphi}$, für welche

$$\text{(10.3)}\qquad r^{(k)}(\varphi)>r^{(k')}(\varphi)\quad\text{ist.}$$

Behauptung. Ein solcher Wert ist $\overline{\varphi}=\frac{\pi}{k}$. Wir verifizieren für $\overline{\varphi}=\frac{\pi}{k}$ die behauptete Ungleichung (10.3) sofort für alle k' $(>k$ beliebig) von der

Form $k'=(2n+1)\cdot k$ $(n=1, 2, \ldots)$. Denn aus der Behauptung

$$\sqrt[k]{-(R-1)\cos\left(k\,\frac{\pi}{k}\right)+\sqrt{(R-1)^2\cos^2\left(k\cdot\frac{\pi}{k}\right)+2R-1}} >$$

$$> \sqrt[k']{(R-1)\cos\left(k'\,\frac{\pi}{k}\right)+\sqrt{(R-1)^2\cos^2\left(k'\,\frac{\pi}{k}\right)+2R-1}}$$

folgt für diese k' die richtige Ungleichung

$$\sqrt[k]{2R-1} > \sqrt[k']{2R-1}\,. \tag{10.4}$$

Ist k' $(>k)$ verschieden von den Zahlen $k(2n+1)$ $(n=1, 2, \ldots)$, so beweisen wir sogar die Ungleichung

$$\sqrt[k]{2R-1} > \sqrt[k']{(R-1)\cos\left(\frac{k'}{k}\cdot\pi\right)+\sqrt{(R-1)^2\cos^2\left(\frac{k'}{k}\cdot\pi\right)+2R-1}}\,. \tag{10.5}$$

die wegen (10.4) sofort (10.3) nach sich zieht. Durch Erheben der beiden Seiten von (10.5) in die k-te Potenz erhält man nacheinander

$$2R-1 > (R-1)\cos\left(\frac{k'}{k}\cdot\pi\right)+\sqrt{(R-1)^2\cos^2\left(\frac{k'}{k}\cdot\pi\right)+2R-1}$$

$$(2R-1)^2-(2R-1) > 2(2R-1)(R-1)\cdot\cos\frac{k'}{k}\cdot\pi$$

und wegen $R-1>0:1>\cos\frac{k'}{k}\,\pi$. Die letzte Ungleichung ist sicher immer dann erfüllt, wenn $\frac{k'}{k}\neq 2n+1$ ist, was aber vorausgesetzt war. Damit ist unsere Behauptung über $\overline{\varphi}=\frac{\pi}{k}$ für alle natürlichen k und k' mit $k'>k$ bewiesen.

§11. Anpassung von Limitierungsverfahren an die Struktur der zu untersuchenden Folgen

Wir wollen die Wirksamkeit unserer neuen Verfahren noch an einem anderen Beispiel[11]) beleuchten. Aus den vielen Fragen, die sich bei der Untersuchung der Wirkfelder von Verfahren verschiedener Klassen ergeben, sei die folgende herausgegriffen: Gibt es zu zwei vorgegebenen HAUSDORFF-Verfahren H und H' eine Folge, die weder von H noch H' summiert wird, dagegen durch $H\times H'$ oder $H'\times H$. Wir wählen $H=(C, 1)$, $H'=(E, 1)$ und zeigen für die Folge

$$s_n^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}} & \text{für } n=2m^2 \quad (m=0, 1, \ldots) \\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1-(-2)^{\frac{n-1}{2}+1}\right) & \text{für } n=2m+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[11]) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn A. PEYERIMHOFF, dem ich an dieser Stelle herzlich für sein liebenswürdiges Interesse an dieser Arbeit danken möchte.

Die Folge $\{s_n^*\}$ ist weder $(C, 1)$- noch $(E, 1)$-limitierbar; dagegen wird sie durch das Verfahren $(C, 1) \times (E, 1)$ zum Wert $\frac{1}{2}$ limitiert.

Beweis. Die Teilfolge $s_0^* s_2^* s_4^* \ldots$ ist die von Herrn KNOPP[12]) angegebene Folge $0\,1\,0\,0\,2\,0\,0\,0\,0\,3\,0 \ldots$, die durch das $(C, 1)$-Verfahren zu $\frac{1}{2}$ limitiert wird, dagegen nicht $(E, 1)$-limitierbar ist.

Die Teilfolge $s_1^* s_3^* s_5^* \ldots$ ist die mit $\frac{3}{2}$ multiplizierte Folge der Teilsummen der geometrischen Reihe $\sum_0^\infty z^n$ an der Stelle $z = -2$, die also von $(E, 1)$ zu $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ limitiert wird, von $(C, 1)$ dagegen nicht erfaßt wird. Hieraus folgt schon aus der Definition unserer neuen Verfahren: Das Verfahren $(C, 1) \times (E, 1)$ limitiert die Folge $\{s_n^*\}$ zu $s^* = \frac{1}{2}$.

$(C, 1)$ auf $\{s_n^*\}$ angewandt liefert die Folge

$$t_n^* = \frac{s_0^* + s_1^* + \cdots + s_n^*}{n+1} = \frac{s_0^* + s_2^* + \cdots + s_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^*}{n+1} + \frac{s_1^* + s_3^* + \cdots + s_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}^*}{n+1}$$

$$= \frac{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{n+1} \cdot \frac{s_0^* + s_2^* + \cdots + s_{2\left[\frac{n}{2}\right]}^*}{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + \frac{s_1^* + s_3^* + \cdots + s_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}^*}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \cdot \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{n+1}.$$

Da die Folgen $\frac{\left[\frac{n}{2}\right]+1}{n+1}$ und $\frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{n+1}$ beide gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren,

$$\frac{s_1^* + s_3^* + \cdots + s_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}^*}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

aber nach KNOPP nicht konvergiert, ist $\{s_n^*\}$ nicht $(C, 1)$-limitierbar. Ähnlich schließt man durch eine leichte Abschätzung, daß $\{s_n^*\}$ nicht $(E, 1)$-limitierbar ist.

An diesem Beispiel sehen wir, daß es möglich ist, durch eine geeignete Zusammenstellung von H-Verfahren $H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}$ zu einem unserer Produktverfahren $H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_{k-1}$ Folgen zu limitieren, für welche die Anwendung jedes einzelnen Verfahrens versagt. Die neuen Verfahren erlauben also, durch geeignete Wahl der Faktoren H_ϱ das Limitierungsverfahren der Struktur der einzelnen Folgen anzupassen.

Die systematische Untersuchung der hier eingeführten Verfahrensklassen $\mathfrak{M}^{(k)}$ und ihrer Beziehungen untereinander ist sicher nicht ohne Interesse. Daneben darf aber vielleicht noch auf etwas anderes aufmerksam gemacht

[12]) KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 532. Berlin: Springer 1931.

werden. Die hier untersuchten Verfahren legen es nahe, allgemein Verfahren $A=(a_{mn})$ von der Struktur

$$t_m=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m,m_k^*+\nu k}\cdot s_{m_k^*+\nu k}$$

zu betrachten (k natürlich, $m=m_k^*+\nu k$, $0\leqq m_k^*<k$), d. h. Verfahren, die man vielleicht als Lückenverfahren der Ordnung k bezeichnen kann. Wie wir gesehen haben, arbeiten solche Verfahren in der Weise, daß k Teilverfahren A_ϱ auf die k Teilfolgen $\{s_{\varrho+\nu k}\}$ ($\varrho=0,1,\ldots,k-1$; $\nu=0,1,\ldots$) für sich angewandt werden. Wir schrieben das Verfahren als „Produkt" der k Teilverfahren $A=A_0\times A_1\times\cdots\times A_{k-1}$. Es ist evident, daß man so unendlich viele Klassen $\mathfrak{A}^{(k)}$ von Verfahren erhält ($\mathfrak{A}^{(k)}\supset\mathfrak{M}^{(k)}$). Die Matrizen dieser Lückenverfahren erhält man durch eine Abbildung des Raumes aller unendlichen Matrizen $A=(a_{mn})$ in sich: Benutzen wir das Symbol

$$\delta_{mn}^{(k)}=\begin{cases}1 & m\equiv n(k)\\ 0 & m\not\equiv n(k),\end{cases}$$

so können wir für jedes k diese Abbildung in der Form schreiben:

$$A=(a_{mn})\to A^{(k)}=(\delta_{mn}^{(k)}a_{mn}).$$

Das Symbol $\delta_{mn}^{(k)}$, in dieser Form angewandt, erzeugt also durch eine Projektion im Matrizenraum die Klasse $\mathfrak{A}^{(k)}$.

Gießen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. Oktober 1955)

Schubert, H.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 133—170 (1956)

Knoten mit zwei Brücken

Von
Horst Schubert

Brückendarstellungen von Knoten und Verkettungen wurden von Torres und Fox [*10*] und dem Verfasser [*6*] unabhängig voneinander eingeführt. Da der Kreis der einzige Knoten ist, der eine solche Darstellung mit nur einer Brücke besitzt, liegt es nahe, diejenigen Knoten und Verkettungen zu klassifizieren, die Brückendarstellungen mit zwei Brücken besitzen. Dies sind gerade diejenigen, die früher als *Viergeflechte* Interesse gefunden haben[1]).

Es seien E_1 und E_2 zwei parallele Ebenen im 3-dimensionalen euklidischen Raum R^3. Wir bezeichnen sie als waagerecht und E_1 als die obere von beiden. Eine *Brückendarstellung mit zwei Brücken* besteht aus je zwei Streckenzügen in E_1 und E_2 und vier dazu senkrechten Strecken, die sich zu einer oder zwei orientierten Knotenlinien zusammensetzen.

Ist k eine solche Brückendarstellung, so läßt sich durch Deformation von k eine *Normalform* herstellen, die bei senkrechter Projektion nur endlich viele Doppelpunkte besitzt und bei der die beiden Streckenzüge auf E_2 von den Projektionen der auf E_1 liegenden Streckenzüge abwechselnd getroffen werden, sofern k nicht zwei unverkettete Kreise darstellt (§ 3). Sieht man von den Endpunkten der Streckenzüge ab, so erhält man Unterkreuzungen, deren Anzahl von der Form $2n$ ist. Falls $n \neq 0$ ist, also Unterkreuzungen vorhanden sind, bezeichnen wir $\alpha = n + 1$ als *Torsion* von k. Außerdem betrachten wir für einen auf E_2 liegenden Streckenzug von k den ersten Unterkreuzungspunkt im Sinne der Orientierung von k. Über ihm liegt ein Punkt eines Streckenzuges auf E_1, welcher der m-te Überkreuzungspunkt dieses Streckenzuges sei. Wir setzen $\beta = \alpha - m$, wenn die Unterkreuzung von rechts nach links erfolgt, $\beta = m - \alpha$ im anderen Falle und bezeichnen β als *Kreuzungsklasse* von k. Besitzt die Normalform keine Unterkreuzungen, so stellt sie entweder den Kreis oder zwei unverkettete Kreise dar. Im ersten Falle setzen wir $\alpha = \beta = 1$, im zweiten $\alpha = \beta = 0$. Durch Angabe von α und β ist die Normalform bis auf unwesentliche Deformationen bestimmt, so daß wir sie durch das Paar (α, β) bezeichnen können. Für $\alpha > 1$ ist β ungerade, teilerfremd zu α und $|\beta| < \alpha$, und zu jedem Paar (α, β), das diesen Bedingungen genügt, gehört eine Normalform. Bei ungeradem α stellt die Normalform einen einzigen Knoten dar, bei geradem α zwei verkettete Kreise.

Zwei Normalformen (α, β) und (α', β') stellen genau dann denselben Knoten bzw. dieselbe Verkettung dar, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α

[1]) Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Viergeflechte und Schubert [*6*] § 2. Über Viergeflechte s. Bankwitz und Schumann [*1*] und Reidemeister [*4*].

ist (§ 3). Die hier betrachteten Knoten und Verkettungen sind also durch die Brückenzahl 2, die Torsion und die beiden möglichen Werte der Kreuzungsklasse vollständig charakterisiert. Sie sind sämtlich symmetrisch (§ 3). Da aus der Normalform (α, β) durch Spiegelung an einer senkrechten Ebene die Normalform $(\alpha, -\beta)$ entsteht, ist ein Knoten zur Normalform (α, β) genau dann amphicheiral, wenn $\beta^2 \equiv -1$ modulo 2α ist, und nur die Normalform (0,0) stellt eine amphicheirale Verkettung dar.

Zu den betrachteten Knoten gehören die Torusknoten der Umlaufzahl 2. Für diese ist $\beta = \pm 1$ und $\alpha\beta$ die Verschlingungszahl. Ferner gehören hierher diejenigen Schlingknoten, deren Diagonalknoten der Kreis ist (§ 3). Diese besitzen Normalformen der Gestalt $(\alpha, \pm(\alpha - 2))$, womit sich eine Vermutung von H. SEIFERT [9] bestätigt, daß der Kreis und der Viererknoten die einzigen amphicheiralen Schlingknoten sind.

Die hier betrachteten Knoten und Verkettungen stehen in einer engen Beziehung zu den Linsenräumen, die von H. SEIFERT bemerkt wurde. Sei k eine Brückendarstellung mit zwei Brücken. Wird der R^3 zur 3-Sphäre S^3 geschlossen, so ist die zweiblättrige, längs k verzweigte Überlagerung der S^3 ein Linsenraum, und es können alle Linsenräume so dargestellt werden (§ 4). Damit läßt sich die angegebene Klassifikation erhalten bis auf diejenigen Verkettungen, deren Verschlingungszahl null ist. Um auch diese mit zu erfassen, wird der Klassifikationssatz mit kombinatorischen Methoden bewiesen (§§ 5 bis 10).

Im Anhang geben wir Normalformen für diejenigen Knoten der ALEXANDER-BRIGGSschen Tabelle an, für die Brückendarstellungen mit zwei Brücken gefunden wurden.

§ 1. Brückendarstellungen

Es sei $\mathfrak{E}^3$ ein 3-Simplex, das der euklidische Raum R^3 mit einer 3-Sphäre S^3 gemein hat, die Rand eines euklidischen 4-Simplexes ist. R^3 und S^3 seien mit einer festen Orientierung versehen und zwar so, daß die Orientierungen auf $\mathfrak{E}^3$ übereinstimmen. Alle zu betrachtenden Knotenlinien und Flächen sollen in $\mathfrak{E}^3$ liegen, was weder für die Einbettung in den R^3 noch für die Einbettung in die S^3 eine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet[2]). Werden semilineare Abbildungen (s-Abbildungen) des R^3 oder der S^3 ausgeführt[3]), so sollen auch die Bilder der jeweils betrachteten Knotenlinien und Flächen in $\mathfrak{E}^3$ liegen. Die s-Abbildungen des R^3 sind dabei immer noch so abgeändert zu denken, daß sie außerhalb $\mathfrak{E}^3$ die Identität sind und somit eine s-Abbildung der S^3 induzieren. Alle Komplexe sollen stets eine Zerlegung in euklidische Simplexe besitzen.

Sei $\mathfrak{K}$ eine Kugel[4]). $k_1, k_2, \ldots, k_n$ seien Sehnen von $\mathfrak{K}$, d. h. paarweise disjunkte, orientierte Streckenzüge auf $\mathfrak{K}$, die mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ nur die

[2]) Vgl. hierzu [6] § 1.

[3]) Über s-Abbildungen s. GRAEUB [3]. Die benutzten Resultate finden sich auch in [7] zusammengestellt. Alle s-Abbildungen sollen orientierungserhaltend sein.

[4]) Wir verstehen hierunter das semilineare Bild eines 3-Simplexes.

Endpunkte gemein haben. Wenn es n paarweise disjunkte Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ auf $\mathfrak{K}$ gibt mit der Eigenschaft, daß der Rand von $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aus k_i und einem Streckenzug l_i auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ besteht und daß l_i den Durchschnitt von $\mathfrak{e}_i$ mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ ausmacht, so sagen wir, daß die *Sehnen* k_i *in* $\mathfrak{K}$ *einfach* sind oder daß eine *Kugel mit n einfachen Sehnen* vorliegt und daß die *Elementarflächenstücke* $\mathfrak{e}_i$ *in die Sehnen* k_i *von* $\mathfrak{K}$ *eingespannt sind.*

Wie wir unten zeigen, stehen Kugeln mit einfachen Sehnen in engem Zusammenhang mit *Brückendarstellungen*, bei denen wir durchweg die folgende Gestalt benutzen wollen: Es seien T_1 und T_2 zwei konzentrische Tetraeder, die bezüglich des gemeinsamen Mittelpunktes Z ähnlich liegen und von denen T_1 das innere bezüglich des R^3 sei. Eine *Brückendarstellung k mit n Brücken* besteht aus je n paarweise disjunkten Streckenzügen auf T_1 und auf T_2 und $2n$ Strecken auf Geraden durch Z, die sich zu einer oder mehreren orientierten Knotenlinien zusammensetzen. Dabei liegt k auf der von T_1 und T_2 berandeten Kugelschale, und wir bezeichnen T_1 als das *innere*, T_2 als das *äußere Grenztetraeder* von k. Es kann angenommen werden, daß k im Inneren des Projektionskegels von Z nach einer (2-dimensionalen) Seite von T_2 liegt, da sich dies stets durch eine *zentrische Abbildung* erreichen läßt, d. h. durch eine s-Abbildung des R^3, welche jedes zu T_1 konzentrische und ähnlich gelegene Tetraeder in sich überführt[5]).

Sei T ein solches Tetraeder zwischen T_1 und T_2. Durch T wird die S^3 in zwei Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zerlegt, und es bildet k in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ je n Sehnen. Diese sind in $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$ einfach. Man erhält nämlich Elementarflächenstücke, die in diese Sehnen eingespannt sind, wenn man k von Z aus projiziert. Eine Brückendarstellung mit n Brücken gibt also Anlaß zu einer Zerlegung der S^3 in zwei Kugeln mit je n einfachen Sehnen. Davon gilt auch die Umkehrung:

Satz 1. *Die Verkettung* $\varkappa$ *von* $m \geqq 1$ *Knoten werde durch ein System* k *von* m *Knotenlinien dargestellt.* $\varkappa$ *besitzt genau dann eine Brückendarstellung mit* n *Brücken, wenn sich die* S^3 *durch eine* 2*-Sphäre so in zwei Kugeln zerlegen läßt, daß* k *in jeder der beiden Kugeln* n *einfache Sehnen bildet.*

Beweis. Besitzt $\varkappa$ eine Brückendarstellung k' mit n Brücken, so gibt es nach dem Vorangehenden zu k' eine 2-Sphäre T' mit den genannten Eigenschaften. Eine s-Abbildung, die k' auf k abbildet, führt T' in eine 2-Sphäre der gewünschten Art über.

Sei umgekehrt T eine 2-Sphäre, welche die S^3 so in zwei Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ zerlegt, daß k in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ je n einfache Sehnen bildet. In die Sehnen von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$ spannen wir die Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ein. Durch eine geeignete s-Abbildung wird T in ein Tetraeder übergeführt, wobei $\mathfrak{K}$ in das Innere von T (bezüglich des R^3) übergehe. Wird T auf seinen Mittelpunkt hinreichend wenig stetig zusammengezogen, so trifft das dabei aus T entstehende Tetraeder jedes der Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_i$ nur in einem einzigen Querschnitt. Es werde T so zu T_1 zusammengezogen. Entsprechend entstehe T_2 aus

[5]) Vgl. [6] § 2.

T durch stetige Dehnung, wobei während der Dehnung das aus T entstehende Tetraeder jedes Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_i$ in nur einem Querschnitt treffe. T_1 bzw. T_2 schneidet von $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_i$ ein Elementarflächenstück im Inneren von T_1 bzw. im Äußeren von T_2 ab. Über dieses läßt sich das von k herrührende Randstück kombinatorisch isotop in den Schnitt von T_1 bzw. T_2 mit $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_i$ deformieren[6]). k ist danach eine verallgemeinerte Brückendarstellung 2. Art mit n Brücken im Sinne von [6] und läßt sich durch eine zentrische Abbildung in eine Brückendarstellung der oben beschriebenen Art überführen[7]).

Hilfssatz 1. *Es sei k ein System von Knotenlinien, dessen Durchschnitt mit der Kugel $\mathfrak{K}$ aus n Sehnen k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{K}$ bestehe. $\mathfrak{K}$ werde durch ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ so in zwei Kugeln zerlegt, daß die Sehnen k_i auf $\mathfrak{e}$ liegen und von $\mathfrak{e}$ paarweise disjunkte Elementarflächenstücke abschneiden. $\mathfrak{K}'$ sei eine Kugel im Inneren von $\mathfrak{K}$, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$ ist, das mit jeder der Sehnen k_i genau eine Sehne k_i' von $\mathfrak{K}'$ gemein hat. Dann gibt es eine s-Abbildung, die $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{e}'$ auf $\mathfrak{e}$ und k auf sich abbildet.*

Beweis. Durch eine semilineare Hilfsabbildung kann erreicht werden, daß $\mathfrak{K}$ ein euklidischer Würfel ist, in dem $\mathfrak{e}$ eben und parallel zu einer Würfelseite liegt[8]). Die Abbildung kann zudem so geschehen, daß eine der Sehnen, etwa k_i, eine Strecke auf $\mathfrak{e}$ ist und daß k den Würfelrand in den Endpunkten von k_i geradlinig durchsetzt. Man erkennt nun, daß sich $\mathfrak{K}' + k$ so deformieren läßt, daß k in sich übergeht und k_i so auf $\mathfrak{K}'$ zu liegen kommt, daß die Endpunkte von k_i und nur diese gemeinsame Punkte der Ränder von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ werden, während der Durchschnitt von $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück bleibt und sich auf den von k_i verschiedenen Sehnen nicht ändert. Die entsprechende Konstruktion kann der Reihe nach für alle Sehnen von $\mathfrak{K}$ ausgeführt werden. Die Ränder von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ haben dann die Endpunkte der Sehnen k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gemein. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{e}$ ist ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$, das die Sehnen k_i enthält und dessen Komplement bezüglich $\mathfrak{e}$ aus n Elementarflächenstücken $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ besteht. Den Rand von $\mathfrak{f}_i$ bilden ein Streckenzug s_i auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ und ein Streckenzug s_i' auf dem Rande von $\mathfrak{K}'$, wobei $\mathfrak{f}_i$ mit den Sehnen von $\mathfrak{K}$ nur die Endpunkte von s_i und s_i' gemein hat. Da sich s_i' über $\mathfrak{f}_i$ kombinatorisch isotop in s_i deformieren läßt, kann man $\mathfrak{e}'$ so in $\mathfrak{e}$ überführen, daß k punktweise festbleibt und daß der Rand von $\mathfrak{e}$ der Durchschnitt der Ränder von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ wird[9]). Das Komplement von $\mathfrak{K}'$ bezüglich $\mathfrak{K}$ besteht dann aus zwei Kugeln, deren Durchschnitt mit k nur aus den Sehnenendpunkten besteht und vermöge deren man den Rand von $\mathfrak{K}'$ in den Rand von $\mathfrak{K}$ bei festem k überführen kann.

---

[6]) GRAEUB [3], S. 33.

[7]) [6] § 2. Der dortige Hilfssatz 1 überträgt sich ohne weiteres auf den hier benötigten Sachverhalt, bei dem statt senkrechter Strecken zwischen waagerechten Ebenen zentral gerichtete Strecken zwischen T_1 und T_2 benötigt werden.

[8]) Vgl. hierzu die Konstruktion in [8] S. 42, 43.

[9]) Vgl. [7] S. 271.

§ 2. Kugeln mit zwei einfachen Sehnen

Für eine Kugel mit zwei einfachen Sehnen sind die beiden Elementarflächenstücke, die man in die beiden Sehnen einspannen kann, bis auf Deformation[10]) eindeutig bestimmt. Dies ergibt sich aus dem Beweis von

Satz 2. *k sei eine Knotenlinie, deren Durchschnitt mit der Kugel $\mathfrak{K}$ aus zwei einfachen Sehnen von $\mathfrak{K}$ bestehe. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ seien je zwei Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{K}$, die in diese Sehnen eingespannt sind. Dann gibt es eine s-Abbildung, die $\mathfrak{K}$ auf sich und $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ auf $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ abbildet und die auf k und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$ die Identität ist.*

Anmerkung. *Der Satz bleibt richtig, wenn k aus zwei Knotenlinien besteht. Ein entsprechender Satz gilt natürlich für Kugeln mit einer einfachen Sehne, dagegen nicht für mehr als zwei Sehnen.*

Wir beweisen zunächst:

Hilfssatz 2. *Auf einem Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ seien zwei mittlere Punkte A, B durch zwei doppelpunktfreie Streckenzüge v, w verbunden. Dann läßt sich v auf $\mathfrak{e}$ kombinatorisch isotop in w deformieren.*

Beweis. Durch kombinatorisch isotope Deformation von v läßt sich zunächst erreichen, daß der Durchschnitt von v und w nur aus den Endpunkten und isolierten Schnittpunkten besteht. Haben nun v und w nur die Endpunkte gemein, so beranden sie auf $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück, über welches v in w deformiert werden kann. Den Fall, daß v und w noch Schnittpunkte gemein haben, führen wir hierauf zurück durch folgende Reduktion:

Wir zählen die Endpunkte A und B als Schnittpunkte, solange noch mindestens ein echter Schnittpunkt vorhanden ist. Seien C und D zwei auf w aufeinanderfolgende Schnittpunkte. Sie schneiden aus w ein von weiteren Schnittpunkten freies Stück w' aus und aus v ein Stück v', das zusammen mit w' auf $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ berandet. Falls $\mathfrak{g}$ keinen der Punkte A, B im Inneren enthält, so macht v' den Durchschnitt von v und $\mathfrak{g}$ aus, und es kann mindestens ein Schnittpunkt von v und w dadurch beseitigt werden, daß man v' über $\mathfrak{g}$ in w' deformiert und anschließend auf das $\mathfrak{g}$ gegenüberliegende Ufer von w abhebt. Wenn A oder B Endpunkt von w' ist, so ist dieser Punkt beim Abheben festzulassen.

Die geschilderte Reduktion führen wir so oft wie möglich für auf w benachbarte Schnittpunkte aus. Der Durchschnitt von v und w besteht dann nur noch aus den Endpunkten A und B. Der Nachweis erfolgt indirekt. Seien $A = C_0, C_1, \ldots, C_n = B$ die verbliebenen Schnittpunkte von v und w in ihrer Reihenfolge auf w, und nehmen wir an, daß $n > 1$ ist. C_{i-1} und C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ schneiden dann aus w ein Stück w_i und aus v ein Stück v_i aus. Das von C_i nach B führende Stück von v bezeichnen wir mit u_i. Nun beranden w_1 und v_1 auf $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$, das nach dem Vorangehenden den Punkt B enthalten muß. u_1 liegt daher auf $\mathfrak{g}_1$ und auch w_2, weil sich v und w in C_1 durchsetzen. C_2 muß auf u_1 liegen (Fig. 1), da andernfalls w_2 von $\mathfrak{g}_1$ ein

[10]) im Sinne von [7] § 1.

von v_2 und w_2 berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}'$ abschnitte, das weder A noch B im Inneren enthielte, weil w_1 und damit u_1 nicht auf $\mathfrak{g}'$ liegen könnte. v_2 und w_2 beranden also auf $\mathfrak{g}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_2$, das mit dem Rande von $\mathfrak{g}_1$ nur den Punkt C_1 gemein hat und daher A nicht enthält. Also liegt B und damit u_2 auf $\mathfrak{g}_2$. Diese Schlußweise läßt sich unter jeweiliger Erhöhung der Indizes um 1 wiederholen. Man gelangt so zu einem von v_{n-1} und w_{n-1} berandeten Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{n-1}$, das den Punkt B, nicht aber A enthält und das auf $\mathfrak{g}_{n-2} \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_1$ liegt. Dann liegen aber v_n und w_n auf $\mathfrak{g}_{n-1}$ und beranden auf $\mathfrak{g}_{n-1}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_n$, das A nicht enthält und B als Randpunkt besitzt, womit sich ein Widerspruch ergibt und die Behauptung folgt.

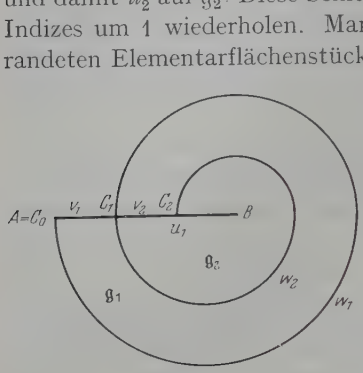

Fig. 1

Beweis von Satz 2. Es seien k_1, k_2 die beiden Sehnen und T der Rand von $\mathfrak{K}$. In k_1 seien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ eingespannt, und es seien w bzw. v die auf T liegenden Randstücke von $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_1'$. Wir führen zunächst $\mathfrak{e}_1'$ in $\mathfrak{e}_1$ über.

1. Schritt. *Reduktion der Schnitte von w und v.*

Die Reduktion entspricht derjenigen im Beweise von Hilfssatz 2, wobei hier verlangt wird, daß die dort mit v' und w' bezeichneten Stücke von v und w auf T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ beranden, das keinen der Endpunkte von k_1 und k_2 im Inneren enthält. Sie werde so oft wie möglich ausgeführt. Jede Reduktion läßt sich auch durch eine s-Abbildung erhalten, die T in sich überführt und k punktweise festläßt.

2. Schritt. *Reduktion der Schnitte von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$.*

Durch isotope simpliziale Deformation von $k + T + \mathfrak{e}_1'$, die T in sich überführt, k punktweise festläßt und die Zahl der Schnittpunkte von v und w nicht ändert, kann erreicht werden, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ aus dem gemeinsamen Randstück k_1 und Schnittlinien besteht, die geschlossen oder möglicherweise Querschnitte sind und die höchstens Punkte von k_1 gemein haben. Querschnitte, deren beide Endpunkte auf k_1 liegen, denken wir uns durch das von den Endpunkten aus k_1 ausgeschnittene Stück geschlossen. Unter den geschlossenen Schnitten gibt es einen auf $\mathfrak{e}_1$ innersten s, der auf $\mathfrak{e}_1$ ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$ berandet. Auf $\mathfrak{e}_1'$ berandet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}'$, wobei $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ mit T höchstens die Endpunkte von k_1 gemein haben. $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ beranden auf $\mathfrak{K}$ eine Kugel $\mathfrak{L}$. Gemeinsame Punkte von k und $\mathfrak{L}$ können nur auf s liegen und machen dann entweder nur einen Punkt oder ein zusammenhängendes Stück von k_1 aus. Durch eine s-Abbildung, die auf k und im Komplement von $\mathfrak{K}$ die Identität ist, kann der Schnitt s so beseitigt werden, daß keine neuen Schnitte entstehen. Es werden so der Reihe nach alle geschlossenen Schnitte von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ beseitigt. Danach sind alle Schnitte verschwunden:

3. Schritt. *Nachweis, daß der Durchschnitt von* $\mathfrak{c}_1$ *und* $\mathfrak{c}_1'$ *nur noch aus* k_1 *besteht.*

Nehmen wir an, daß noch Querschnitte von $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_1'$ vorhanden sind. Unter diesen können solche sein, die einen Endpunkt auf k_1 besitzen, der nicht zugleich Endpunkt von k_1 ist. Wir denken uns diese durch ein Stück von k_1 so verlängert, daß beide Endpunkte auf T liegen. Jeder Querschnitt schneidet dann von $\mathfrak{c}_1$ ein Elementarflächenstück ab, das mit T genau ein zusammenhängendes Stück des Randes gemein hat. Sei $\mathfrak{f}$ ein auf $\mathfrak{c}_1$ innerstes solches Elementarflächenstück. Es wird berandet von einem Querschnitt s und einem Stück t von w, und es enthält $\mathfrak{f}$ außer dem Randbogen s keinen weiteren Querschnitt. Von $\mathfrak{c}_1'$ schneidet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}'$ ab, das von s und einem Stück t' von v berandet wird, wobei t und t' genau die Endpunkte gemein haben. $\mathfrak{f}+\mathfrak{f}'$ ist ein Elementarflächenstück, das $\mathfrak{R}$ in zwei Kugeln zerlegt. Eine von

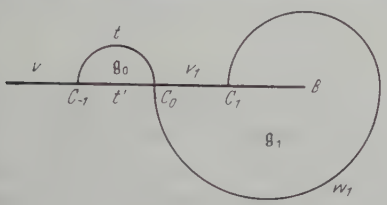

Fig. 2a

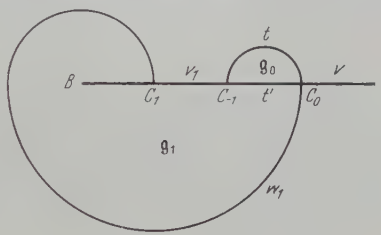

Fig. 2b

beiden, sie heiße $\mathfrak{L}$, enthält keinen Punkt von k_1 im Inneren. Der Durchschnitt von $\mathfrak{L}$ und T ist ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_0$, das von t und t' berandet wird und keinen Endpunkt von k_1 im Inneren enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{g}_0$ und v besteht daher aus $t' \cdot k_2$ liegt auf $\mathfrak{L}$, weil andernfalls $\mathfrak{g}_0$ keinen der Endpunkte von k_1 und k_2 im Inneren enthielte im Widerspruch zum 1. Schritt.

Seien C_{-1} und C_0 die Endpunkte von t. Mindestens einer von beiden, etwa C_0, ist nicht Endpunkt von k_1. C_0 zerlegt w in zwei Stücke. Dabei sei w_0 dasjenige, das mit t nur den Endpunkt C_0 gemein hat. Wir denken uns w_0 in C_0 entspringend und betrachten den auf w_0 nächsten Schnittpunkt C_1 von v und w. C_0 und C_1 schneiden aus w ein Stück w_1 und aus v ein Stück v_1 aus. w_1 hat mit $\mathfrak{g}_0$ höchstens die Endpunkte gemein, weil sich v und w in C_0 schneiden und der Durchschnitt von $\mathfrak{g}_0$ und v aus t' besteht, und es beranden v_1 und w_1 auf T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$, das mit $\mathfrak{g}_0$ keine inneren Punkte gemein hat. $\mathfrak{g}_1$ enthält mindestens einen der Endpunkte von k_1 im Inneren, da sonst ein Widerspruch zum 1. Schritt vorläge. Es kann auch nur ein Endpunkt von k_1 im Inneren von $\mathfrak{g}_1$ liegen (Fig. 2a und b). Da sich nämlich v und w in C_0 durchsetzen und da $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_1$ in der Umgebung von C_0 an verschiedene Ufer von v anstoßen, kann nur eines der beiden Stücke, in welches v durch C_0 zerlegt wird, auf $\mathfrak{g}_1$ liegen, während das andere mit $\mathfrak{g}_1$ nur den Endpunkt C_0 gemein hat. Sei B der auf $\mathfrak{g}_1$ liegende Endpunkt von k_1 und v_0 das von C_0 nach B führende Stück von v. Es kann nun die Schlußweise des Beweises von Hilfssatz 2 auf w_0 und v_0 angewandt werden, womit sich der gesuchte Widerspruch ergibt.

4. Schritt. *Abschluß des Beweises.*

Nach dem Vorangehenden bilden e_1 und e_1' zusammen ein Elementarflächenstück, welches von $\mathfrak{K}$ eine Kugel $\mathfrak{L}$ abschneidet, die k_2 nicht enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{L}$ und T ist ein von v und w berandetes Elementarflächenstück, über welches v kombinatorisch isotop in w deformiert werden kann. Da man annehmen kann, daß T ein Tetraeder und e_1 eben ist, läßt sich das Deformationsresultat durch eine s-Abbildung erhalten, die k punktweise festläßt, T auf sich abbildet und e_1' so, daß der Durchschnitt von e_1 und e_1' aus dem gemeinsamen Rande besteht[11]). Danach läßt sich e_1' bei festem k und T in e_1 überführen.

e_2' wird nun bei festem $e_1' = e_1$ entsprechend in e_2 übergeführt. Der 3. Schritt ist dabei überflüssig, da man vermöge Hilfssatz 2 schließen kann, daß der 1. Schritt für e_2 und e_2' alle Schnittpunkte der auf T liegenden Randstücke beseitigt.

Aus dem vorangehenden Beweis ergibt sich noch:

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{K}$ eine Kugel mit zwei einfachen Sehnen und T der Rand von $\mathfrak{K}$. e_1, e_2 und e_1', e_2' seien je zwei Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{K}$, die in die Sehnen eingespannt sind. Die auf T liegenden Randstücke von e_1' und e_2' sind dann auf T kombinatorisch isotop zu den entsprechenden Randstücken von e_1 und e_2.*

§ 3. Normalformen

Es sei k eine Brückendarstellung im Sinne von § 1 mit zwei Brücken, T_1 das innere, T_2 das äußere Grenztetraeder und Z ihr Mittelpunkt. Die beiden auf T_1 bzw. T_2 liegenden Stücke von k bezeichnen wir als *innere* bzw. *äußere Wege*. Eine Strecke heiße *zentral*, wenn sie auf einer Geraden durch Z liegt. k besteht also aus den beiden inneren Wegen, den beiden äußeren Wegen und vier zentralen Strecken zwischen T_1 und T_2. Eine *Brücke* von k wird von einem inneren Weg und den beiden anstoßenden Strecken gebildet. Projiziert man k von Z aus auf T_2, so bildet sich jede zentrale Strecke in einen Punkt ab, während jeder andere Doppelpunkt der Projektion Bild von genau zwei Punkten auf k ist, nämlich von einem *Überkreuzungspunkt* auf einem inneren Weg und einem *Unterkreuzungspunkt* auf einem äußeren Weg.

Wir normieren die Brückendarstellung dadurch, daß wir Unterkreuzungen so weit wie möglich beseitigen. Seien w_1, w_2 die Projektionen der inneren Wege, v_1, v_2 die äußeren Wege. Zunächst können v_1 und v_2 bei festen Endpunkten auf T_2 so deformiert werden, daß v_1 und v_2 mit w_1 und w_2 nur die Endpunkte und Schnittpunkte gemein haben. Die Endpunkte von v_1 und v_2 zählen als Schnittpunkte, solange auf v_1 bzw. v_2 noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt liegt.

Nehmen wir an, daß einer der beiden Wege w_1, w_2, etwa w_1, zweimal hintereinander denselben äußeren Weg, etwa v_2, schneidet. Die beiden

[11]) Vgl. [7] S. 271.

Schnittpunkte schneiden aus w_1 ein von weiteren Schnitten freies Stück w', aus v_2 ein Stück v' aus. Es gibt dann ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$, das von w' und v' berandet wird und das, abgesehen von seinem Rande, außerhalb T_2 liegt. Über $\mathfrak{g}$ läßt sich v' kombinatorisch isotop in w' deformieren und danach so von w' abheben, daß mindestens ein Schnittpunkt verschwunden ist. Die Endpunkte von v_1 und v_2 sind dabei festzulassen. Die angegebene Reduktion werde so oft wie möglich ausgeführt. Danach ist eine Normalform von k erreicht: Entweder haben w_1, w_2 mit v_1, v_2 nur noch die Endpunkte gemein oder jeder der beiden Wege w_1 und w_2 trifft abwechselnd v_1 und v_2. Im

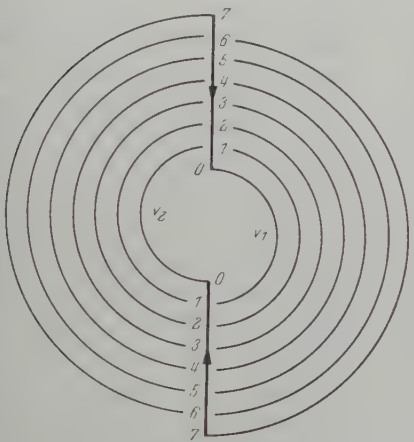

Fig. 3

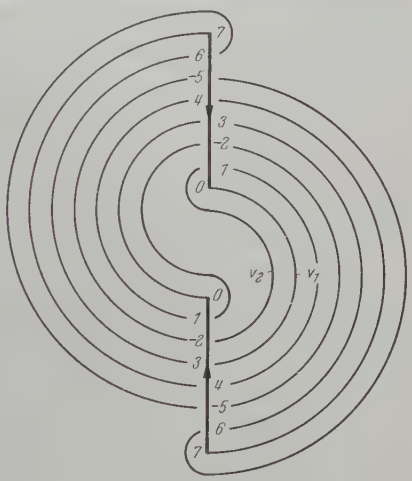

Fig. 4

zweiten Falle trifft auch jeder der beiden Wege v_1 und v_2 abwechselnd w_1 und w_2: Träfe etwa v_1 zweimal hintereinander w_2, so berandeten diese beiden Schnittpunkte auf v_1 ein von weiteren Schnitten freies Stück, während sie auf w_2 ein Stück mit einer ungeraden Anzahl von Schnittpunkten von w_2 mit v_1, v_2 berandeten, weil w_2 abwechselnd v_1 und v_2 trifft. Dies ist aber unmöglich, weil sich w_1, w_2, v_1, v_2 zu einem oder zwei geschlossenen Wegen (mit Doppelpunkten) zusammensetzen.

Besitzt die *Normalform* keine Überkreuzungen, so stellt sie entweder den Kreis oder zwei unverkettete Kreise dar. Im ersten Falle bezeichnen wir sie mit (1, 1), im zweiten Falle mit (0, 0).

Besitzt die *Normalform* k Überkreuzungen, so rechnen wir die Endpunkte der inneren Wege darunter. Jeder innere Weg überkreuzt die äußeren Wege abwechselnd, und jeder äußere Weg unterkreuzt die inneren Wege abwechselnd. Die Anzahl der Überkreuzungen ist von der Form $2n$ mit $n > 2$. Wir bezeichnen $\alpha = n - 1$ als *Torsion*[12]) von k. Fig. 3—5 zeigen Projektionen von Normalformen für $\alpha = 7$. Ist α gerade, so sind die Endpunkte eines äußeren

[12]) Die Abweichung gegenüber der Einleitung beruht darauf, daß hier die Endpunkte der inneren Wege als Überkreuzungen zählen.

Weges von k Endpunkte derselben Brücke, weil die äußeren Wege die beiden inneren abwechselnd unterkreuzen, und es stellt k zwei verkettete Kreise dar. Ist α ungerade, so stellt k einen einzigen Knoten dar.

Seien u_1, u_2 die inneren, v_1, v_2 die äußeren Wege der Normalform k, wobei v_1 unter dem Endpunkt von u_1 entspringe. Für $\alpha > 1$ bezeichnen wir die Überkreuzungspunkte auf u_1 und auf u_2 mit $0, 1, \ldots, \alpha$, und zwar in der Reihenfolge, in der sie entgegen der Orientierung von k auftreten. Den Unterkreuzungspunkten ordnen wir Restklassen modulo 2α zu, die wir durch die ganzen Zahlen des halboffenen Intervalls $(-\alpha, \alpha]$ repräsentieren: Der

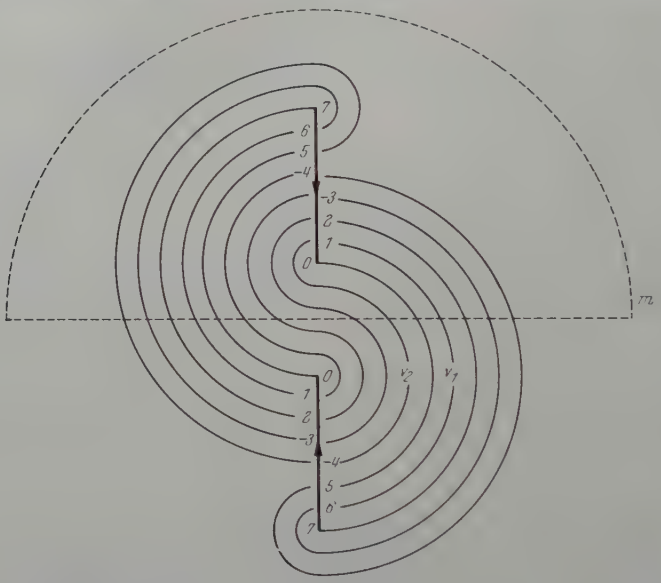

Fig. 5

Unterkreuzungspunkt unter dem Überkreuzungspunkt γ erhält die Restklasse γ zugeordnet, wenn die Unterkreuzung von rechts nach links erfolgt, $-\gamma$ im anderen Falle. Diese Zuordnung ist auch in den Endpunkten von v_1 und v_2 wegen $\gamma = 0$ bzw. $\gamma = \alpha$ sinnvoll (Fig. 3–5). Durch die Unterkreuzungspunkte zerfallen v_1 und v_2 in je α Stücke. Für diese subtrahieren wir die Restklasse des Anfangspunktes von derjenigen des Endpunktes. Die Differenz β ist eine von der Auswahl des Stückes unabhängige Restklasse: v_1, v_2 und die Projektionen w_1, w_2 von u_1, u_2 zerlegen das äußere Grenztetraeder T_2 in 2α Elementarflächenstücke, wobei jedes von je einem Stück von v_1, v_2, w_1, w_2 berandet wird. Sei $\mathfrak{e}$ ein solches Elementarflächenstück, dessen Ecken den Überkreuzungen der Nummern $\mu, \mu+1$ und $\nu, \nu+1$ entsprechen mögen. Fig. 6a–f zeigt für alle möglichen Orientierungen der Randstücke von $\mathfrak{e}$, daß den zu v_1 und v_2 gehörigen Randstücken dieselbe Differenzklasse zugeordnet ist. Dabei sind die zu w_1, w_2 gehörigen Randstücke senkrecht, die zu v_1, v_2 gehörigen Randstücke waagerecht gezeichnet,

und an jeder Ecke ist die zur Unterkreuzung gehörige Restklasse angeschrieben. Da jedes der Elementarflächenstücke, in welche T_2 durch v_1, v_2, w_1 und w_2 zerlegt wird, die Eigenschaft hat, daß seinen beiden zu v_1, v_2 gehörigen Randstücken dieselbe Restklasse zugeordnet wird, ist die Restklasse β für alle Stücke von v_1 und v_2 dieselbe.

Wir bezeichnen β als die *Kreuzungsklasse* der Normalform k. Durchläuft man einen äußeren Weg, etwa v_1, so gelangt man der Reihe nach zu Unterkreuzungen, die abwechselnd unter u_1 und u_2 liegen und denen die Restklassen

$$0, \beta, 2\beta, \ldots, (\alpha-1)\beta, \alpha\beta \text{ modulo } 2\alpha \tag{1}$$

zugeordnet sind. β ist ungerade wegen $\alpha\beta = \alpha$ modulo 2α und teilerfremd zu α, da in (1) keine Restklasse doppelt auftreten kann. Durch Angabe von α und β ist das Überkreuzungsschema der Normalform k vollständig bestimmt und damit k bis auf eine zentrische Abbildung, welche die von Z ausgehenden Halbgeraden permutiert, also auch der von k dargestellte Knoten bzw. die von k dargestellte Verkettung. Wir bezeichnen daher die *Normalform* mit (α, β).

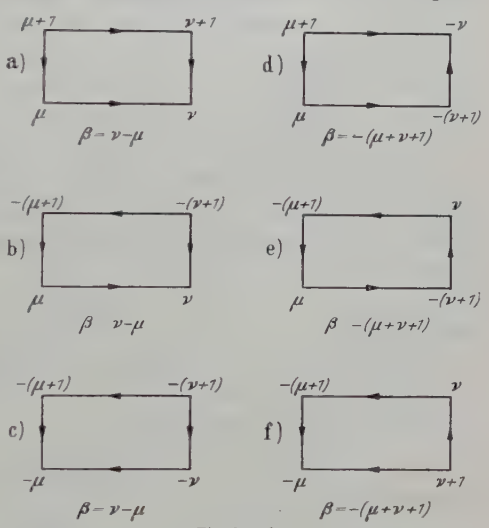

Fig. 6 a—f

Gibt man sich eine ganze Zahl $\alpha \geqq 0$ und für $\alpha > 1$ eine zu α teilerfremde, ungerade ganze Zahl β im Intervall $(-\alpha, \alpha)$ vor, so gehört dazu offenbar auch eine Normalform.

Für spätere Anwendung bemerken wir: Werden bei einer Normalform (α, β) mit $\alpha \geqq 1$ auf dem äußeren Grenztetraeder δ geschlossene, paarweise punktfremde Wege gezeichnet, so daß jeder dieser Wege die äußeren Wege der Normalform trennt, so kann dies so geschehen, daß die geschlossenen Wege die inneren Wege der Normalform abwechselnd unterkreuzen, und zwar je α-mal. Zählt man die so erhaltenen Unterkreuzungen mit, so liest man an Stelle von α und β nun $\bar{\alpha} = \alpha(\delta+1)$ und $\bar{\beta} = \beta(\delta+1)$ ab, und es ist $\delta+1$ der größte gemeinsame Teiler von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$.

Orientiert man eine Normalform (α, β) um, wobei im Falle einer Verkettung beide Komponenten umzuorientieren sind, so bleiben α und die Unterkreuzungssinne erhalten. Eine bisher mit γ bezeichnete Überkreuzung wird nun mit $\alpha - \gamma$ bezeichnet, und für jedes Stück der äußeren Wege vertauschen sich Anfangs- und Endpunkt, woraus folgt, daß auch β erhalten bleibt. Bezeichnet man eine Verkettung als symmetrisch, wenn sie bei Umorientierung aller Komponenten in sich übergeht, so gilt also

Satz 3. *Knoten und Verkettungen, die Brückendarstellungen mit zwei Brücken besitzen, sind symmetrisch*[13]).

Stellt k eine Verkettung dar und orientiert man nur eine der Komponenten um, so geht β in die Klasse $\alpha+\beta$ modulo 2α über.

Wir hatten bemerkt, daß ein Paar (α, β), das den oben angegebenen Bedingungen genügt, eindeutig einen Knoten bzw. eine Verkettung bestimmt. Das Umgekehrte gilt im allgemeinen nicht. Dies beruht darauf, daß bei der Definition der Kreuzungsklasse die äußeren vor den inneren Wegen ausgezeichnet sind. Es gibt offenbar eine (orientierungserhaltende) s-Abbildung der S^3, welche die Grenztetraeder T_1, T_2 vertauscht und jede zentrale Strecke zwischen T_1 und T_2 wieder in eine solche überführt. Die Normalform (α, β) geht dabei in eine Normalform (α, β') über. Zur Bestimmung von β' bemerken wir zunächst, daß bei der betrachteten Abbildung jeder Unterkreuzung eine gleichsinnige entspricht. Ein Überkreuzungspunkt der Nummer γ $(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ geht in einen Unterkreuzungspunkt zur Klasse $(\alpha-\gamma)\beta'$ über, ein Unterkreuzungspunkt zur Klasse $n\beta$ $(0 \leq n \leq \alpha)$ in einen Überkreuzungspunkt der Nummer $\alpha-n$. Wird n zu gegebenem γ so gewählt, daß $n\beta \equiv \varepsilon\gamma$ mit $\varepsilon = \pm 1$ ist (alle Kongruenzen sind modulo 2α zu verstehen), so gibt ε den Unterkreuzungssinn unter dem Überkreuzungspunkt der Nummer γ an, und wegen der Invarianz des Unterkreuzungssinnes bei der betrachteten Abbildung gilt:

$$\varepsilon(\alpha - n) \equiv (\alpha - \gamma)\beta'.$$

Daraus folgt

$$(\alpha - \gamma)\beta\beta' \equiv \varepsilon(\alpha - n)\beta \equiv \varepsilon\alpha\beta - \gamma,$$

und weil β und β' ungerade sind:

$$\gamma\beta\beta' \equiv \gamma,$$

insbesondere für $\gamma = 1$:

$$\beta\beta' \equiv 1.$$

Zwei Normalformen (α, β) und (α, β') stellen also denselben Knoten bzw. dieselbe Verkettung dar, wenn $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α ist. Dies ist beispielsweise für Fig. 4 und Fig. 5 der Fall. Damit sind aber alle Darstellungsmöglichkeiten erschöpft. Es gilt:

Satz 4. *Zwei Normalformen (α, β) und (α', β') stellen genau dann denselben Knoten bzw. dieselbe Verkettung dar, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α ist.*

Den Beweis dieses Klassifikationssatzes erbringen wir in den §§ 5–10.

Durch Spiegelung an einer Ebene im R^3 erhält man aus der Normalform (α, β) die Normalform $(\alpha, -\beta)$, weil sich die Unterkreuzungssinne umkehren. Daher gilt:

[13]) Für Knoten wurde dies von BANKWITZ und SCHUMANN [1] auf anderem Weg bewiesen.

Korollar zu Satz 4. *Ein durch die Normalform* (α, β) *darstellbarer Knoten ist genau dann amphicheiral, wenn* $\beta^2 \equiv -1$ *modulo* 2α *ist. Keine von* $(0, 0)$ *verschiedene Normalform stellt eine amphicheirale Verkettung dar.*

Für ungerades $\alpha > 1$ und $\beta = \pm 1$ stellt die Normalform (α, β) offenbar einen Torusknoten der Umlaufzahl 2 und der Verschlingungszahl $\alpha\beta$ dar (vgl. Fig. 3). Wegen Satz 4 sind damit alle in Frage kommenden Torusknoten erfaßt, da unter den Torusknoten nur diejenigen der Umlaufzahl 2 eine Brückendarstellung mit zwei Brücken besitzen[14]).

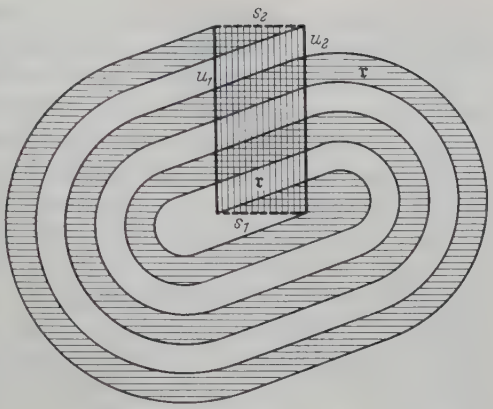

Fig. 7

Satz 5. *Jeder Schlingknoten, der den Kreis als Diagonalknoten besitzt, läßt sich durch eine Normalform der Gestalt* $(\alpha, \pm(\alpha - 2))$ *darstellen. Kreis und Viererknoten sind die einzigen amphicheiralen Schlingknoten*[15]).

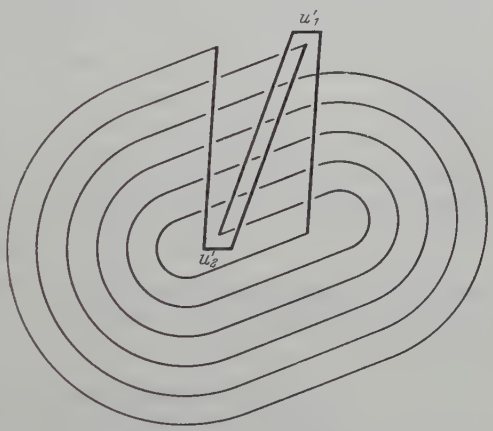

Fig. 8a

Beweis. Schlingknoten, deren Diagonalknoten vom Kreis verschieden ist, besitzen keine Brükkendarstellung mit zwei Brücken (SCHUBERT [6]) und sind nicht amphicheiral (SEIFERT [9]). Der Kreis wird durch die Normalform $(1, 1)$ dargestellt und kann daher im Folgenden ausgeschlossen werden. Wir können annehmen, daß die Verdrillungszahl δ des Schlingknotens positiv ist, da sich negative Verdrillungszahlen durch Spiegelung erhalten lassen. Wir benutzen die Konstruktion

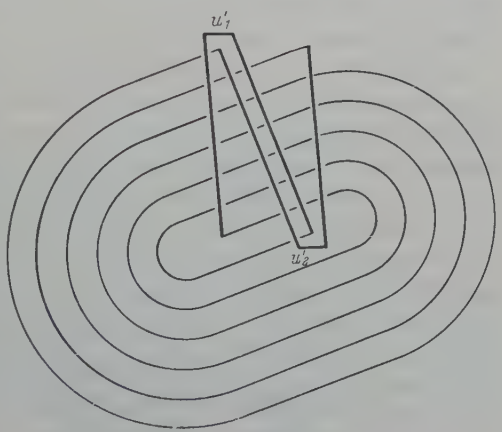

Fig. 8b

[14]) [6] Satz 10.

[15]) Über Schlingknoten s. SEIFERT [9], GRAEUB [3], SCHUBERT [6], [7].

von [6] § 10 und gehen von der Normalform $(2\delta, 1)$ aus. Die beiden Kreise dieser Verkettung können als gleichsinnig orientierte Ränder eines Kreisringes $\mathfrak{r}$ mit der Verdrillungszahl δ aufgefaßt werden (Fig. 7). Es kann angenommen werden, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{r}$ mit dem inneren Grenztetraeder T_1 der Normalform ein rechteckiges Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ ist, das die inneren Wege u_1, u_2 der Normalform als Kanten besitzt und dessen beide anderen Kanten s_1, s_2 die äußeren Wege der Normalform nicht überkreuzen. u_1, u_2 werden nun durch zwei Wege u_1', u_2' auf T_1 so ersetzt, daß u_1' bzw. u_2' mit s_1 bzw. s_2 genau die Endpunkte und mit s_2 bzw. s_1 genau einen Schnittpunkt gemein hat und daß u_1' und u_2' die äußeren Wege abwechselnd überkreuzen (Fig. 8a und b). Durch kohärente Orientierung entsteht eine Knotenlinie, die einen Schlingknoten mit der Verdrillungszahl δ darstellt. Die Wahl von u_1', u_2' kann auf zwei zueinander spiegelbildliche Weisen erfolgen, die beiden zugehörigen Schlingknoten unterscheiden sich durch das Vorzeichen der Eigenschnittzahl. In dem einen Falle erhält man die Normalform $(4\delta - 1, 1 - 2\delta)$, im anderen $(4\delta + 1, 1 + 2\delta)$. Wegen Satz 4 und

$$-(4\delta - 3)(1 - 2\delta) \equiv 1 \quad \text{modulo } (8\delta - 2)$$

und

$$-(4\delta - 1)(1 + 2\delta) \equiv 1 \quad \text{modulo } (8\delta + 2)$$

ergibt sich die erste Aussage des Satzes. Die zweite folgt wegen des Korollars zu Satz 4 aus der Tatsache, daß

$$(\alpha - 2)^2 \equiv -1 \quad \text{modulo } 2\alpha$$

nur die Lösungen $\alpha = 1$ und $\alpha = 5$ besitzt, denn es stellt $(1, 1)$ den Kreis, $(5, 3)$ den Viererknoten dar.

§ 4. Die Beziehung zu den Linsenräumen

Satz 6. *Ist k eine Brückendarstellung mit zwei Brücken von der Normalform (α, β), so ist die zweiblättrige, längs k verzweigte Überlagerung der S^3 ein orientierter Linsenraum, der durch das Paar (α, β) charakterisiert ist, wenn β als Restklasse modulo α aufgefaßt wird*[16]).

Beweis. Nach § 1 ist die S^3 orientiert, die Orientierung der Überlagerung entsteht hieraus auf natürliche Weise.

Zu der Normalform k betrachten wir ein zu den Grenztetraedern T_1, T bezüglich des Mittelpunktes Z ähnlich gelegenes Tetraeder T zwischen T und T_2. Die S^3 wird durch T in zwei Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zerlegt, wobei Z auf $\mathfrak{K}$ liege. In $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ bildet k je zwei einfache Sehnen. In diese spannen wir Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ bzw. $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ dadurch ein, daß wir sie von Z aus auf T projizieren. Die zweiblättrige, längs der Sehnen verzweigte Überlagerung von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$ ist ein orientierter Vollring $\hat{\mathfrak{K}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{L}}$, und es sind $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ bzw. $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ Bilder zweier Meridianflächen von $\hat{\mathfrak{K}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{L}}$. Auf T wählen wir einen geschlossenen Weg m, welcher die auf T liegenden Randstücke von

[16]) Dieser Satz stammt von H. SEIFERT.

$\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ trennt und die Randstücke von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ abwechselnd und damit je α-mal trifft. In Fig. 5 ist m gestrichelt eingezeichnet. Entsprechend kann auf T ein Weg n gezeichnet werden, so daß dabei die Rollen von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ vertauscht sind und sich m und n in 2α Punkten schneiden. Über m liegen zwei Meridiane von $\tilde{\mathfrak{K}}$, sei $\tilde{m}$ einer davon. Entsprechend sei $\tilde{n}$ ein über n liegender Meridian von $\tilde{\mathfrak{L}}$. $\tilde{m}$ und $\tilde{n}$ schneiden sich in α Punkten, und jeder zweite Schnittpunkt von m und n ist Bild eines Schnittpunktes von $\tilde{m}$ und $\tilde{n}$. Ist $\alpha = 0$, so ist die Überlagerung der S^3 das topologische Produkt $S^1 \times S^2$. Ist $\alpha > 0$, so orientieren wir $\tilde{m}$ und $\tilde{n}$ so, daß von $\tilde{\mathfrak{K}}$ aus gesehen $\tilde{m}$ von $\tilde{n}$ von links nach rechts durchsetzt wird. (Der Kreuzungssinn ist in allen Schnittpunkten derselbe.) Geht man nun auf $\tilde{n}$ von einem Schnittpunkt zum nächsten, so rückt man auf $\tilde{m}$ im Sinne der Orientierung um β Schnittpunkte vor. Dies ist die Behauptung.

Nach REIDEMEISTER [5] ergeben zwei Paare (α, β) und (α', β') denselben orientierten Linsenraum, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' = 1$ modulo α ist. Damit folgt Satz 4 aus Satz 6 für Knoten, also für ungerades α, weil die ungeraden Restklassen modulo 2α in eineindeutiger Beziehung zu den von null verschiedenen Restklassen modulo α stehen und die Kongruenzen $\beta\beta' - 1$ modulo 2α und $\beta\beta' = 1$ modulo α für ungerade Repräsentanten gleichwertig sind. Für Verkettungen liefert Satz 6 die Klassifikation nur, wenn von der Orientierung der Verkettung abgesehen wird. Wegen Satz 3 kann die Orientierung durch die Verschlingungszahl erfaßt werden, wenn diese nicht null ist. Es gibt jedoch Verkettungen, deren Verschlingungszahl null ist und die nicht in sich übergehen, wenn eine der beiden Komponenten umorientiert wird. Beispiele hierfür sind (32,7), (48,17), (64,15), (64,23), (72,11). Wir müssen daher Satz 4 auf anderem Wege beweisen.

§ 5. Ansatz zum Beweise des Klassifikationssatzes

Um zusätzliche Komplikationen zu vermeiden, schließen wir die Normalformen (0, 0) und (1, 1) im Folgenden aus. Dies ist wegen Satz 6 möglich. Alle anderen Normalformen lassen wir zu, weil eine weitere Einschränkung, die nach Satz 6 möglich wäre, keine Vereinfachung unseres Beweises ergibt.

Seien k und k' zwei Brückendarstellungen mit zwei Brücken desselben Knotens bzw. derselben Verkettung in den Normalformen (α, β) und (α', β'). T_1 sei das innere, T_2 das äußere Grenztetraeder von k und Z ihr gemeinsamer Mittelpunkt. T_1', T_2', Z' sollen die entsprechende Bedeutung für k' haben. Das Tetraeder S' liege zwischen T_1' und T_2' und entstehe aus T_1' durch Dehnung mit dem Zentrum Z'. S' zerlegt die S^3 in zwei Kugeln $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$, wobei Z' auf $\mathfrak{K}'$ liege. k' bildet in $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{L}'$ je zwei einfache Sehnen. Werden diese von Z' aus auf S' projiziert, so erhält man je zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2'$ und $\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2'$, die in die Sehnen von $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{L}'$ eingespannt sind. Die auf S' liegenden Randbogen dieser Elementarflächenstücke geben das Kreuzungsschema der Normalform k' wieder. Nach Voraussetzung gibt es eine s-Abbildung φ der S^3 auf sich, die k' in k überführt. Die Bilder von $S', \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2',$

$\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \mathfrak{K}', \mathfrak{L}'$ bezeichnen wir durch die entsprechenden ungestrichenen Buchstaben.

Zum Beweise des Satzes wird φ so abgeändert, daß die Behauptung ersichtlich wird. Hierfür benutzen wir die Schar konzentrischer Tetraeder (T), die aus T_1 durch Dehnung mit dem Zentrum Z entsteht[17]). φ wird zunächst so gewählt werden, daß die Schar (T) zulässig bezüglich S, $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ ist und daß $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ keine Ausnahmeecken besitzen. Danach werden die Ausnahmeecken von S, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beseitigt (§§ 6—8), wobei wir zulassen, daß neue Ausnahmeecken auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ entstehen, wenn solche von S beseitigt werden. Nachdem alle Ausnahmeecken verschwunden sind, läßt sich zeigen (§ 9), daß S, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ eines der beiden Grenztetraeder nicht durchsetzen, womit sich schließlich (§ 10) die Behauptung ergibt.

Wir beginnen damit, daß wir zunächst $\mathfrak{K}, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ und danach $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ in spezielle Lage bringen.

1. Schritt. *Normierung der Gestalt von* $\mathfrak{K}$.

Durch geeignete Änderung von φ soll $\mathfrak{K}$ folgende „wurmförmige" Gestalt erhalten:

1. Die Sehnen von $\mathfrak{K}$ liegen auf zentralen Strecken von k. Je ein Endpunkt dieser beiden Sehnen ist auf dem Rande S von $\mathfrak{K}$ ein Extremum der zentrischen Distanz[18]), während das Schartetraeder durch den anderen Sehnenendpunkt von S ein ausnahmeeckenfreies Elementarflächenstück abschneidet, für welches der eine Sehnenendpunkt mittlerer Punkt, der andere Randpunkt ist. Die beiden so erhaltenen Elementarflächenstücke auf S werden als *Köpfe* bezeichnet, ihr Rand als *Grenzlinie* des Kopfes.

2. Jeder Kopf berandet zusammen mit einem Elementarflächenstück auf dem Schartetraeder durch seine Grenzlinie eine auf $\mathfrak{K}$ liegende Kugel. Auf dieser liegt eines der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$, und zwar so, daß es von den Schartetraedern durch die Endpunkte der zugehörigen Sehne nur in diesen Endpunkten getroffen wird und von den dazwischen liegenden Schartetraedern in nur je einem Querschnitt.

3. $\mathfrak{K}$ liegt zwischen T_1 und T_2. Der Rand S besteht außer den beiden Köpfen aus *Knien* und *Schenkeln*. Jeder Schnitt von S mit einem Schartetraeder berandet auf diesem ein ganz auf $\mathfrak{K}$ liegendes Elementarflächenstück. Es sind also keine „Einstülpungen" vorhanden.

Um zu zeigen, daß wir φ so abändern können, bemerken wir zunächst, daß es auf $\mathfrak{K}'$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$ gibt, das $\mathfrak{K}'$ so in zwei Kugeln zerlegt, daß $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ auf $\mathfrak{e}'$ liegen. Man kann $\mathfrak{e}'$ beispielsweise so erhalten, daß man die inneren Wege von k' auf T_1' zu dem Rande eines Elementarflächenstückes ergänzt und diesen Rand von Z' aus auf S' projiziert. Sei q' ein Streckenzug auf $\mathfrak{e}'$, der die beiden Sehnen von $\mathfrak{K}'$ verbindet und mit diesen nur seine Endpunkte gemein hat. Es kann angenommen werden, daß

[17]) Vgl. hierzu und für das Folgende [6] § 3.

[18]) Zwei Punkte haben gleiche zentrische Distanz, wenn sie auf demselben Schartetraeder liegen.

die Bilder der Endpunkte von q' auf zentralen Strecken von k liegen, da sich dies durch eine s-Abbildung erreichen läßt, die k auf sich abbildet. Ferner kann angenommen werden, daß diese Punkte in einer Triangulation des Bildes von $\mathfrak{e}'$ nicht Ecken sind, andernfalls ist q' geeignet abzuändern. Das Bild von q' ist ein Streckenzug q, der bei festen Enden und festem k kombinatorisch isotop so deformiert werden kann, daß er zwischen T_1 und T_2 liegt. Es kann nun für q eine simpliziale Umgebung so gewählt werden, daß diese eine Kugel $\mathfrak{K}$ der oben beschriebenen Gestalt ausmacht, wobei der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und dem Bilde von $\mathfrak{e}'$ aus einem Elementarflächenstück $\mathfrak{e}''$ besteht, dessen Durchschnitte mit den Bildern von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ ebene Elementarflächenstücke sind, die der Forderung 2. genügen. Das Urbild von $\mathfrak{K}$ ist eine Kugel $\mathfrak{K}''$. Für $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ treffen die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 zu, womit man die gewünschte Abänderung von φ erhält.

2. Schritt. *Normierung der Gestalt von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$.

$\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ werden von je einem Streckenzug r_1 bzw. r_2 auf S und je einer von k herrührenden Sehne l_1 bzw. l_2 von $\mathfrak{L}$ berandet. Bei festen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ kann φ so abgeändert werden, daß S und k in sich übergehen und Folgendes gilt:

1. Für r_1 und r_2 sind Extrema der zentrischen Distanz die Endpunkte und die Schnitte mit den Rändern von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$. Die übrigen Extrema liegen auf Knien von S, und zwar so, daß keine zwei aufeinanderfolgenden Extrema auf demselben Knie liegen und daß r_1 und r_2 je α'-mal über jeden Schenkel von S laufen. r_1 und r_2 gehen nicht durch die Ausnahmeecken von S.

2. Soweit l_1 und l_2 mit inneren oder äußeren Wegen von k zusammenfallen, stoßen $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ von außen an T_1 bzw. von innen an T_2 an.

3. Die Schar (T) ist zulässig in bezug auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Diejenigen Sehnenendpunkte, die auf den Grenzlinien der Köpfe von S liegen, sind Extrema der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$, während die übrigen Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2 nicht zugleich Extrema auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind. Auf dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ liegen keine Ausnahmeecken bezüglich (T).

4. Alle Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ haben die Ordnung 1, wobei keine zwei Ausnahmeecken dieselbe zentrische Distanz besitzen.

Es ist noch genauer zu sagen, was unter der Zulässigkeit der Schar (T) bezüglich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ in den Randpunkten von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ verstanden werden soll. Die Forderung 2. fixiert den Sachverhalt für die auf T_1 und T_2 liegenden Randpunkte. Für die übrigen ist Forderung 3. maßgebend. Für einen Randpunkt P, der nicht auf T_1 oder T_2 liegt und der nicht Extremum der zentrischen Distanz auf r_1 oder r_2 ist, wird verlangt, daß in P genau ein Schnitt von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit dem Schartetraeder durch P entspringt. Das Verhalten in den Sehnenendpunkten zeigt Fig. 9; Fig. 10 zeigt das Verhalten in einem anderen Extremum der zentrischen Distanz auf r_1 oder r_2.

Forderung 1. läßt sich dadurch erfüllen, daß man φ mit einer s-Abbildung zusammensetzt, die S in sich überführt und auf k, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die Identität ist. Betrachtet man nämlich für die Grenzlinien der Schenkel von S die Urbilder

auf S', so findet man geschlossene Wege, welche die auf S' liegenden Randstücke von e_1' und e_2' trennen und die unter Vermeidung dieser Randstücke auf S' kombinatorisch isotop gleichzeitig so deformiert werden können, daß sie die auf S' liegenden Randstücke r_1' und r_2' von f_1' und f_2' je α'-mal schneiden, und zwar dann notwendig abwechselnd, wie in Fig. 5 durch die gestrichelte Linie m angedeutet ist. Für die Grenzlinien der Köpfe ist dabei der zugehörige Sehnenendpunkt als Schnittpunkt zu zählen. Wird φ entsprechend deformiert, so treffen r_1 und r_2 jede Grenzlinie je α'-mal, und anschließend können noch r_1 und r_2 auf S kombinatorisch isotop bei festen Endpunkten und festen Schnittpunkten mit den Rändern von e_1 und e_2 so deformiert werden, daß Forderung 1. erfüllt ist.

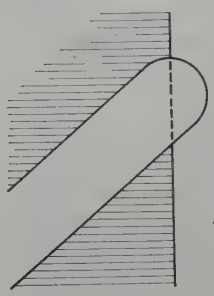

Fig. 9

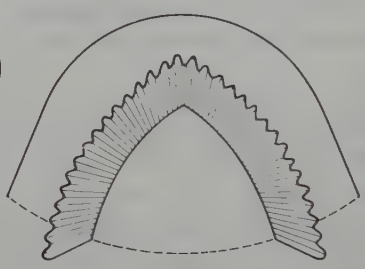

Fig. 10

Forderung 2. ist in naheliegender Weise zu erfüllen: Längs der inneren und äußeren Wege von k drille man f_1 und f_2 in die gewünschte Gestalt, wobei sich Drillungen von f_1 und f_2 um die zentralen Strecken von k ergeben. Das gewünschte Resultat läßt sich durch eine s-Abbildung erreichen, die auf $\mathfrak{K}$ die Identität ist und k in sich überführt.

Forderung 4. für die mittleren Punkte von f_1 und f_2 läßt sich durch [6] Hilfssatz 5 erfüllen, Forderung 3. für die Randpunkte zuvor durch eine entsprechende Konstruktion, wobei an Stelle des dortigen Würfels $\mathfrak{W}$ eine geeignete abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{V}$ bezüglich $\mathfrak{L}$ für den jeweils betrachteten Punkt zu verwenden ist und der Schnitt von f_1 bzw. f_2 mit dem Rande von $\mathfrak{V}$ unter Umständen noch geeignet kombinatorisch isotop zu deformieren ist.

3. Schritt. *Veränderungen an Knien und Köpfen von S.*

Wir ändern S noch so ab, daß Folgendes gilt:

1. Haben zwei Punkte auf den Knien und Köpfen von S dieselbe zentrische Distanz, so liegen sie auf demselben Knie oder demselben Kopf.

2. Keine Ausnahmeecke von f_1 und f_2 hat dieselbe zentrische Distanz wie ein Punkt auf einem Knie oder Kopf von S.

Dabei sollen keine neuen Ausnahmeecken auf S, f_1 und f_2 erzeugt werden.

Da r_1 und r_2 nicht durch die Ausnahmeecken von S gehen, kann S in den Ausnahmeecken längs der anstoßenden Schenkel hinreichend wenig so ausgebeult werden[19]), daß keine zwei Ausnahmeecken von S dieselbe zentrische Distanz haben und daß diese zentrischen Distanzen von denjenigen der Sehnenendpunkte und der Ausnahmeecken von f_1 und f_2 verschieden sind. Außerdem kann angenommen werden, daß keine Ausnahmeecke von f_1 und f_2

[19]) Vgl. [6] § 6.

dieselbe zentrische Distanz wie ein Sehnenendpunkt hat. Die beiden Forderungen lassen sich nun dadurch erfüllen, daß die Knie und Köpfe von S bei festen Grenzlinien hinreichend stark zusammengezogen werden.

Wir beschreiben das Zusammenziehen zunächst für ein Knie. Der Anschaulichkeit halber nehmen wir an, daß das betrachtete Knie innerhalb des Projektionskegels von Z nach den „waagerechten" Tetraederseiten liegt, so daß wir die Einbettung in den R^3 benutzen können[20]). Statt von zentrischer Distanz können wir dann von Höhe sprechen. Dabei sei Z der höchste Punkt des Projektionskegels. Ein inneres Knie von S kann als „oberes Knie" aufgefaßt werden. Zur Fixierung der Sprechweise legen wir ein solches zugrunde.

Das betrachtete Knie $\mathfrak{k}$ liegt oberhalb der waagerechten Ebene E durch seine Grenzlinien. Von den auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücken von r_1 und r_2 betrachten wir zuerst dasjenige, es heiße t, das die geringste Höhe erreicht. t kann über ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{k}$ so deformiert werden, daß t beliebig nahe an E zu liegen kommt. Dabei wird $\mathfrak{g}$ so gewählt, daß es von jeder zu E parallelen Ebene in höchstens einem Querschnitt getroffen wird, was offenbar möglich ist. Gehört t zum Rande von $\mathfrak{k}_1$, so läßt sich $\mathfrak{k}_1$ durch $\mathfrak{g}$ ergänzen und anschließend $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{k}$ bei festem t abheben, indem man die Ecken einer geeigneten Triangulation von $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{g}$, die auf $\mathfrak{g}$, nicht aber auf t liegen, hinreichend wenig waagerecht ins Äußere von $\mathfrak{K}$ verschiebt. Das Resultat läßt sich auch durch eine s-Abbildung erreichen, die S in sich überführt und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{g}$ die Identität ist. Es können so der Reihe nach alle auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücke von r_1 und r_2 hinreichend nahe an E herandeformiert werden, wobei nur das jeweils benutzte Elementarflächenstück oberhalb der bereits deformierten Stücke von r_1 und r_2 liegen muß. Nachdem dies geschehen ist, kann $\mathfrak{k}$ bei festem $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ so deformiert werden, daß $\mathfrak{k}$ ein Knie bleibt und ganz unterhalb einer waagerechten Ebene liegt, die beliebig dicht oberhalb des höchsten Punktes der auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücke von r_1 und r_2 verläuft.

Für einen Kopf $\mathfrak{k}$ von S benutzen wir entsprechend die Einbettung in den R^3, und wir nehmen an, daß $\mathfrak{k}$ oberhalb der waagerechten Ebene E durch seine Grenzlinie liegt. Innerhalb $\mathfrak{k}$ liegt eines der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, etwa $\mathfrak{e}_1$. Ähnlich wie im Falle eines Knies können hier die auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücke von r_1 und r_2 an E herandeformiert werden bis auf dasjenige, das im höchsten Punkte von $\mathfrak{k}$ endet. Nur ist hier die entsprechende Abbildung so vorzunehmen, daß $\mathfrak{e}_1$ in sich übergeht und die Schnitte von r_1 und r_2 mit dem Rande von $\mathfrak{e}_1$ Maxima der Höhe auf r_1 und r_2 bleiben, was bei geeigneter Wahl der zur Deformation benutzten Elementarflächenstücke möglich ist. Das Zusammenziehen des Kopfes kann danach so geschehen, daß k auf sich und $\mathfrak{e}_1$ in sich abgebildet wird und daß das im höchsten Punkte von $\mathfrak{k}$ endende Stück von r_1 oder r_2 monoton bleibt.

[20]) Vgl. den wiederholt benutzten Sachverhalt in [6].

§ 6. Beseitigung von Ausnahmeecken auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$

Wir betrachten alle Schartetraeder durch die Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und für jedes solche Schartetraeder die Schnitte mit $\mathfrak{f}_1$, die durch die betreffende Ausnahmeecke gehen. Diese Schnitte sind geschlossen oder gehen zum Rande von $\mathfrak{f}_1$. Unter den geschlossenen gibt es einen auf $\mathfrak{f}_1$ innersten, der auf $\mathfrak{f}_1$ ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück, also eine *Haube*, berandet. Wir werden zunächst alle Hauben beseitigen.

Die danach verbleibenden Schnitte durch Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ mit Schartetraedern führen sämtlich zum Rande von $\mathfrak{f}_1$. Dabei gehen von jeder Ausnahmeecke, wegen der Ordnung 1, vier solche Schnitte aus, wodurch $\mathfrak{f}_1$ jeweils in vier Elementarflächenstücke zerlegt wird. Wir nennen ein solches Elementarflächenstück einen *Zipfel*, wenn auf ihm keine weitere Ausnahmeecke liegt.

Ein Zipfel von $\mathfrak{f}_1$ hat mit dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ ein Stück t gemein, das entweder auf S oder auf k oder teilweise auf S und teilweise auf k liegt. Es verschwinden alle Ausnahmeecken, wenn man der Reihe nach diejenigen beseitigt, von denen ein zu k punktfremder Zipfel ausgeht. Andernfalls gäbe es dann zwei von derselben Ausnahmeecke ausgehende Zipfel, die in einem Schnitt aneinanderstoßen und S nicht treffen. Das auf dem Rande der beiden Zipfel liegende Stück von k ließe sich über die beiden Zipfel deformieren und man erhielte, daß k in eine Brückendarstellung mit nur einer Brücke verwandelt werden könnte, also den Kreis darstellte, was ausgeschlossen wurde.

Wir brauchen also nur solche Zipfel zu betrachten, bei denen das mit t bezeichnete Randstück ganz auf S liegt. Wegen des 3. Schrittes von § 5 kann dabei t nicht ganz auf einem Knie oder Kopf von S liegen. Wir betrachten hier nur solche Zipfel, bei denen das Randstück t die Köpfe von S nicht trifft, und behandeln die verbleibenden in § 8.

1. Schritt. *Beseitigung von Hauben.*

Da wir ausgeschlossen haben, daß k zwei unverkettete Kreise darstellt, ist eine Kugel, deren Rand k nicht trifft, entweder punktfremd zu k oder sie enthält k im Inneren. Hierauf beruht es, daß wir die Hauben von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nach dem Verfahren von [6] § 5 beseitigen können. Zunächst werden wie dort im 1. Schritt alle diejenigen Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beseitigt, durch welche eine geschlossene Schnittlinie von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit dem zugehörigen Schartetraeder geht, die auf dem Schartetraeder ein zu k und S punktfremdes Elementarflächenstück berandet. Insbesondere verschwinden dabei alle Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ innerhalb T_1 und außerhalb T_2, und es bleiben k und S ungeändert.

Die weitere Beseitigung von Hauben verläuft entsprechend dem 2. bis 5. Schritt von [6] § 5. Bei dem Ausschieben (5. Schritt) ist zu beachten, daß der dort mit h bezeichnete Streckenzug k und S nicht und $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nur in solchen Punkten treffen darf, die Minima bzw. Maxima der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind, je nachdem eine innere oder äußere Haube

beseitigt wird. Diese Wahl von h ist möglich wegen Forderung 3. des 2. Schrittes in § 5.

Bei diesem Vorgang ändert sich die Gestalt von k. Die ursprüngliche Gestalt von k läßt sich jedoch durch eine zentrische Abbildung wieder herstellen: Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß eine innere Haube beseitigt wurde. Man kann dann zunächst alle bei der Beseitigung der Haube benutzten zentrischen Hilfsabbildungen rückgängig machen, so daß also die Haube durch eine s-Abbildung χ beseitigt wird, die außerhalb T_2 die Identität ist. Nach dem Verfahren von [6] Hilfssatz 1 kann χ durch eine zentrische Abbildung, die im Komplement von T_2 die Identität ist, so abgeändert werden, daß die zentralen Strecken von k in zentrale Strecken übergehen, also festbleiben. k und $\chi(k)$ sind dann Brückendarstellungen mit zwei Brücken im Sinne von § 1 und stimmen in den zentralen Strecken und den äußeren Wegen überein. Die Brücken von k und $\chi(k)$ bilden in der von T_2 berandeten Kugel, die das Innere von T_2 ausmacht, je zwei einfache Sehnen. In die von k herrührenden Sehnen spannen wir Elementarflächenstücke $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ein, indem wir die Brücken von k von Z aus auf T_2 projizieren. Entsprechend werden die Elementarflächenstücke $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ in die von $\chi(k)$ herrührenden Sehnen eingespannt. In diese Sehnen können aber auch die Elementarflächenstücke $\chi(\mathfrak{m}_1)$, $\chi(\mathfrak{m}_2)$ eingespannt werden. Nach Hilfssatz 3 sind die auf T_2 liegenden Randstücke von $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ zu den entsprechenden Randstücken von $\chi(\mathfrak{m}_1)$, $\chi(\mathfrak{m}_2)$ kombinatorisch isotop auf T_2. Da die bezeichneten Randstücke Zentralprojektionen der inneren Wege von $\chi(k)$ und k sind, lassen sich die inneren Wege von $\chi(k)$ auf T_1 kombinatorisch isotop in die inneren Wege von k deformieren, wodurch $\chi(k)$ in k übergeht. Das Deformationsresultat läßt sich auch durch eine zentrische Abbildung erhalten[21]).

2. Schritt. *Beseitigung von Zipfeln, die k und die Köpfe von S nicht treffen.*

Es sei $\mathfrak{z}$ ein Zipfel der genannten Art, etwa auf $\mathfrak{f}_1$. $\mathfrak{z}$ wird berandet von zwei Schnitten s_1, s_2 von $\mathfrak{f}_1$ mit einem Schartetraeder T durch eine Ausnahmeecke A von $\mathfrak{f}_1$, wobei s_1 und s_2 von A ausgehen und zum Rande von $\mathfrak{f}_1$ führen, und einem Randstück t von $\mathfrak{f}_1$, das auf S liegt und die Köpfe von S nicht trifft. Nach der Gestalt von t unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall a. t liegt auf einem Knie und den beiden anstoßenden Schenkeln von S.

Das Verfahren besteht darin, daß wir das Stück von S, auf dem t verläuft, vermöge $\mathfrak{z}$ so abbiegen, daß A Extremum der zentrischen Distanz des Randes von $\mathfrak{f}_1$ wird und auf ein Knie von S zu liegen kommt. Es entstehen dabei neue Ausnahmeecken, die jedoch nach dem Verfahren des 1. Schrittes beseitigt werden können.

t liege auf dem Knie $\mathfrak{k}$ und den beiden anstoßenden Schenkeln $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ von S. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß $\mathfrak{k}$ ein inneres Knie ist. Durch eine zentrische Abbildung kann erreicht werden, daß $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{z}$ im Inneren des Projektionskegels von Z nach den „waagerechten"

[21]) Vgl. die Konstruktion in [7] S. 144.

Tetraederseiten liegen, so daß wir die Einbettung in den R^3 wie im 3. Schritt von § 5 benutzen und von Höhe statt von zentrischer Distanz sprechen können. Der Sattelpunkt A von $\mathfrak{f}_1$ liegt nun in einer waagerechten Ebene E, in der s_1 und s_2 verlaufen, und es liegt $\mathfrak{z}$ oberhalb E. Der höchste Punkt H von t ist nach dem 2. Schritt von § 5 nicht zugleich höchster Punkt von $\mathfrak{z}$. Daher wird $\mathfrak{z}$ von der waagerechten Ebene durch H in einer geschlossenen Schnittlinie geschnitten und besitzt oberhalb dieser Ebene haubenförmige Gestalt. Durch eine s-Abbildung, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{z}$, insbesondere auf k, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und den Köpfen von S die Identität ist und die $\mathfrak{f}_1$ in sich abbildet, kann Folgendes erreicht werden:

Die von S berandete Kugel $\mathfrak{K}$ wird längs $\mathfrak{z}$ und dann noch etwas weiter unterhalb s_1 und s_2 ausgebeult, wobei gleichzeitig $\mathfrak{f}_1$ in sich zusammengezogen wird, und zwar so, daß der ausgebeulte Teil von $\mathfrak{K}$ hinreichend dicht unter $\mathfrak{z}$ liegt und daß auf S nur zwei neue Ausnahmeecken entstehen, nämlich der höchste Punkt H von t und eine neue Ausnahmeecke Q dicht unterhalb A. Das auf $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{s}_2$ liegende Stück von r_1, das t umfaßt, geht dabei in ein solches durch A über, wobei A das einzige Maximum der Höhe für dieses Stück ist.

Ähnlich wie im 3. Schritt von § 5 werden nun die übrigen auf $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{s}_2$ verlaufenden Stücke von r_1 und r_2 mittels geeigneter Elementarflächenstücke auf S so deformiert, daß auf ihnen die Höhe wieder nur ein einziges Maximum annimmt und daß dieses auf dem ausgebeulten Stück hinreichend dicht über A liegt. Bei dieser Deformation werden die anstoßenden Stücke von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ „mitgezogen". Es entstehen dabei neue Ausnahmeecken auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Die zur Deformation benutzten Elementarflächenstücke können jedoch so gewählt werden, daß sie die Ausnahmeecke in den Grenzlinien des Knies $\mathfrak{k}$ vermeiden. Kann ein solches Elementarflächenstück zudem so gewählt werden, daß es auch den höchsten Punkt von $\mathfrak{k}$ vermeidet, so läßt es sich so bestimmen, daß auf dem mitgezogenen Stück von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ nur eine einzige Ausnahmeecke entsteht, die dicht bei H liegt. Muß das benutzte Elementarflächenstück so gewählt werden, daß der höchste Punkt von $\mathfrak{k}$ auf ihm liegt, so läßt es sich einrichten, daß auf dem entsprechend mitgezogenen Stück von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ nur zwei Ausnahmeecken entstehen, die eine dicht bei H, die andere dicht bei dem bisherigen Maximum der Höhe des Randbogens. Durch die neu entstehenden Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ gehen geschlossene Schnittlinien von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit den zugehörigen Schartetraedern, wie sich aus der Gestalt von $\mathfrak{k}$ und der Gestalt von $\mathfrak{z}$ oberhalb der waagerechten Ebene durch H ergibt, und können anschließend wieder nach dem Verfahren des 1. Schrittes beseitigt werden. Zuvor ist noch das oberhalb E liegende, ausgebeulte Stück von $\mathfrak{K}$ dicht an E heranzuziehen, so daß $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ festbleiben und Q als einzige Ausnahmeecke des verbeulten Stückes verbleibt. Dies ist möglich, da eine waagerechte Ebene hinreichend dicht über E das ausgebeulte Stück von $\mathfrak{K}$ in nur einem Elementarflächenstück schneidet.

Das geschilderte Verfahren soll für $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ so oft wie möglich angewandt werden.

Fall b. t verläuft über mindestens zwei Knie von S.

Das Schartetraeder T durch die Ausnahmeecke A schneidet S in zwei Schnitten u_1 und u_2, auf denen s_1 und s_2 enden. u_1 und u_2 schneiden aus S einen Kreisring $\mathfrak{s}$ aus, der t enthält und auf dem mindestens zwei Knie liegen. Auf T beranden u_1 und u_2 zwei auf $\mathfrak{K}$ liegende Elementarflächenstücke, die zusammen mit $\mathfrak{s}$ eine auf $\mathfrak{K}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$ beranden. Durch eine s-Abbildung, die k, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ und die Köpfe von S festläßt, kann $\mathfrak{M}$ längs des Zipfels $\mathfrak{z}$ so abgebogen werden, daß s_1 und s_2 ins Innere von $\mathfrak{K}$ geraten, daß S weiterhin aus Knien, Schenkeln und den beiden Köpfen besteht und daß an Stelle der auf $\mathfrak{s}$ liegenden Knie kein oder ein Knie tritt, je nachdem die Anzahl der Knie auf $\mathfrak{s}$ gerade oder ungerade ist, während die übrigen Knie unverändert erhalten bleiben. Die Zahl der Ausnahmeecken von S vermindert sich auf diese Weise um mindestens zwei. Das Beweisverfahren ist hierauf vom 2. Schritt des § 5 an zu wiederholen, und zwar so oft, bis Zipfel der hier betrachteten Art auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht mehr vorhanden sind.

§ 7. Beseitigung der Ausnahmeecken von S

Wir haben soeben einen Sachverhalt betrachtet, der zu einer Reduktion der Ausnahmeecken von S Anlaß gab. Ähnliche Reduktionen können möglich sein, wenn man an Stelle von Ausnahmeecken die Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2 betrachtet. Das Schartetraeder durch ein solches Extremum A, das nicht Sehnenendpunkt ist, schneidet $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ entweder in einer geschlossenen Schnittlinie durch A oder in zwei von A ausgehenden Querschnitten. Im ersten Falle nennen wir das *Extremum A regulär*, im zweiten *singulär*. Zwei der Sehnenendpunkte sind Extrema der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$. Wir bezeichnen auch diese beiden Punkte als reguläre Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2. Die beiden anderen Sehnenendpunkte zählen zu den singulären Extrema. Das Schartetraeder durch einen solchen Punkt schneidet $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ in einem Querschnitt, der von diesem Punkte ausgeht. Wir beseitigen zunächst Ausnahmeecken von S vermöge der Querschnitte auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$, die von singulären Extrema ausgehen, und danach die restlichen Ausnahmeecken von S. Nach jeder solchen Reduktion ist das Beweisverfahren erneut mit dem 2. Schritt von § 5 zu beginnen.

1. Schritt. *Reduktionen vermöge singulärer Extrema auf Knien.*

Sei A ein solches Extremum der zentrischen Distanz, etwa auf r_1, und es liege A auf dem Knie $\mathfrak{k}$ von S. Das Schartetraeder T durch A schneidet $\mathfrak{f}_1$ in zwei Querschnitten s_1 und s_2, die von A ausgehen. s_1 und s_2 schneiden von $\mathfrak{f}_1$ zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ ab, die von s_1 bzw. s_2 und einem Stück t_1 bzw. t_2 des Randes von $\mathfrak{f}_1$ berandet werden. Eine Reduktion ist möglich, wenn eines der beiden Randstücke t_1, t_2 entweder keinen der beiden Köpfe von S trifft oder nur einen von beiden und dann ein Stück mit k gemein hat. Es liege etwa für t_1 einer dieser beiden Fälle vor.

Fall a. t_1 *trifft keinen der beiden Köpfe von* S.

In diesem Falle liegt t_1 auf S. Seien v_1 und v_2 die Grenzlinien des Knies $\mathfrak{k}$. Nur eine von beiden, etwa v_2, wird von t_1 getroffen, und zwar nur einmal. Wegen des 3. Schrittes von § 5 endet t_1 auf einem Schnitte u von T mit einem Schenkel von S im Endpunkt von s_1. Aus S wird von v_1 und u ein Kreisring $\mathfrak{s}$ ausgeschnitten, auf dem t_1 verläuft. Auf $\mathfrak{s}$ liegt mindestens ein von $\mathfrak{k}$ verschiedenes Knie, und es berandet $\mathfrak{s}$ zusammen mit je einem Elementarflächenstück auf den Schartetraedern durch v_1 und u eine auf $\mathfrak{K}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$. Wie in § 6, 2. Schritt, Fall b kann nun $\mathfrak{M}$ längs $\mathfrak{g}_1$ so abgebogen werden, daß s_1 ins Innere von $\mathfrak{M}$ gelangt, S weiterhin aus Knien, Schenkeln und den beiden Köpfen besteht und mindestens zwei Knie von S verschwinden.

Fall b. t_1 *hat ein Stück mit* k *gemein und trifft nur einen der beiden Köpfe von* S.

Sind v_1 und v_2 wieder die Grenzlinien von $\mathfrak{k}$, so wird auch in diesem Falle nur eine von beiden, etwa v_2, von t_1 getroffen. v_1 zerlegt S in zwei Elementarflächenstücke. Auf einem von beiden, es heiße $\mathfrak{s}$, liegt ein Stück von t_1, während der Rest von t_1 ein Stück von k ausmacht. v_1 berandet auf seinem Schartetraeder ein Elementarflächenstück, das zusammen mit $\mathfrak{s}$ eine auf $\mathfrak{K}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$ berandet. Entsprechend dem Vorangehenden wird $\mathfrak{M}$ längs $\mathfrak{g}_1$ abgebogen, so daß $\mathfrak{s}$ in einen Kopf und ein Stück eines Schenkels übergeht. Der auf $\mathfrak{s}$ liegende Kopf ist hierbei längs k zu verschieben, möglicherweise über innere und äußere Wege von k hinweg. Die hierzu benötigte s-Abbildung ist so zu wählen, daß k in sich übergeht und daß das an den Kopf von $\mathfrak{s}$ anstoßende Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{e}_2$ wieder die geforderte Gestalt (§ 5, 1. Schritt) erhält.

2. Schritt. *Reduktionen vermöge singulärer Extrema auf den Köpfen.*

Sei A ein solches Extremum der zentrischen Distanz, etwa auf r_1. Ist A nicht Sehnenendpunkt, so gehen von A zwei Querschnitte s_1 und s_2 aus, die auf dem Schartetraeder T durch A liegen. Eine Reduktion ist dann möglich, wenn einer dieser beiden Querschnitte von $\mathfrak{f}_1$ ein Elementarflächenstück abschneidet, das k und den zweiten Kopf von S nicht trifft. Sei dies etwa für s_1 der Fall. s_1 schneidet von $\mathfrak{f}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$ ab, das von s_1 und einem Randstück t_1 von $\mathfrak{f}_1$ berandet wird. t_1 trifft k und den zweiten Kopf von S nicht und endet auf einem Schnitt u von T mit einem Schenkel von S. Auf S berandet u ein Elementarflächenstück $\mathfrak{s}$, das t_1 enthält und auf dem mindestens ein Knie liegt. $\mathfrak{s}$ berandet zusammen mit einem Elementarflächenstück auf T eine auf $\mathfrak{K}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$. Wie oben wird $\mathfrak{M}$ längs $\mathfrak{g}_1$ so abgebogen, daß $\mathfrak{s}$ in einen Kopf und ein Stück eines Schenkels übergeht. Dies kann so geschehen, daß k in sich und das an den Kopf von $\mathfrak{s}$ anstoßende Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{e}_2$ wieder in ein solches mit den geforderten Eigenschaften übergeht.

Ist A Sehnenendpunkt, so wird $\mathfrak{f}_1$ von dem Schartetraeder durch A in einem von A ausgehenden Querschnitt s getroffen. Wenn s von $\mathfrak{f}_1$ ein Elementarflächenstück abschneidet, das den zweiten Kopf von S nicht trifft

und das mit k nur den Punkt A gemein hat, so kann eine Reduktion ausgeführt werden, die der eben beschriebenen entspricht.

3. Schritt. *Vorbereitung für die weitere Reduktion.*

Es sei keine der vorangehenden Reduktionen mehr ausführbar aber noch mindestens ein Knie von S vorhanden. Wir bestimmen ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$, vermöge dessen eine weitere Reduktion möglich ist.

Nehmen wir zunächst an, daß auf $\mathfrak{f}_1$ noch Ausnahmeecken vorhanden sind. Für mindestens eine Ausnahmeecke A tritt dann der Fall ein, daß von A zwei „benachbarte" Zipfel ausgehen, die einen von A ausgehenden Schnitt von $\mathfrak{f}_1$ mit dem Schartetraeder durch A als gemeinsames Randstück besitzen und von denen mindestens einer zu k punktfremd ist. Wenn möglich, wählen wir A so, daß beide Zipfel zu k punktfremd sind, und betrachten den dann vorliegenden Sachverhalt.

Fall a. Auf $\mathfrak{f}_1$ existieren zwei benachbarte Zipfel $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, die k nicht treffen.

$\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ haben mit r_1 je ein Stück des Randes t_1 bzw. t_2 gemein. Wegen § 6 führen t_1 und t_2 mindestens je einmal über einen Kopf. Da t_1 und t_2 einen Endpunkt gemein haben und mindestens ein Knie von S vorhanden ist, gibt es auf t_1 oder t_2 mindestens ein Extremum der zentrischen Distanz, das auf einem Knie liegt. Sei dies etwa für t_1 der Fall. Wir betrachten alle Schnitte von $\mathfrak{z}_1$ mit Schartetraedern, die durch die Extrema der zentrischen Distanz von t_1 gehen. Sind unter diesen Querschnitte, so gibt es einen solchen q, der von $\mathfrak{z}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ abschneidet, das keinen weiteren Querschnitt enthält und das von q und einem Stück t_1' von t_1 berandet wird. Sollte kein Querschnitt vorhanden sein, was sich als unmöglich erweisen wird, so setzen wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_1$ und $t_1' = t_1$. Wegen der vorangehenden Reduktionen geht t_1' mindestens einmal über einen Kopf $\mathfrak{k}_1$, und es sei A_1 ein Extremum der zentrischen Distanz von t_1', das auf $\mathfrak{k}_1$ liegt. Nach Wahl von q ist A_1 regulär. Das Schartetraeder T_1' durch A_1 schneidet $\mathfrak{g}$ in einer geschlossenen Schnittlinie s_1 durch A_1. $\mathfrak{s}$ sei der an $\mathfrak{k}_1$ anstoßende Schenkel, $\mathfrak{k}_2$ das folgende Knie. Wir dehnen T_1' stetig in dem Sinne[22]), daß aus dem Schnitt von T_1' mit $\mathfrak{k}_1$ ein solcher mit $\mathfrak{s}$ und schließlich ein solcher mit $\mathfrak{k}_2$ entsteht, und verfolgen dabei den aus s_1 entstehenden Schnitt mit $\mathfrak{g}$. Dieser geht zunächst in einen Querschnitt von $\mathfrak{g}$ über, der auf $\mathfrak{k}_1$ entspringt und endet, danach in einen solchen, der auf $\mathfrak{s}$ entspringt und endet, schließlich in einen solchen, dessen Endpunkte auf $\mathfrak{k}_2$ liegen, bis wir zu einem Extremum der zentrischen Distanz von t_1' auf $\mathfrak{k}_2$ gelangen. Dieser Sachverhalt muß nach Wahl von $\mathfrak{g}$ eintreten, weil auf $\mathfrak{g}$ außer q keine Querschnitte durch Extrema der zentrischen Distanz von t_1 und keine Querschnitte durch Ausnahmeecken liegen. Bei stetigem Dehnen von T_1' im angegebenen Sinne geht also s_1 in einen Querschnitt von $\mathfrak{z}_1$ über, der von einem Extremum A_2 der zentrischen Distanz von t_1 auf $\mathfrak{k}_2$ ausgeht, und dieser Querschnitt muß q sein. Nach Wahl von t_1 bemerkt man zugleich, daß die Annahme $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_1$ widerspruchsvoll ist. Das Auffinden des

[22]) Es sind Dehnungsfaktoren kleiner als 1 zugelassen.

Elementarflächenstückes $\mathfrak{g}$, dessen Gestalt sich aus dem Vorangehenden ergibt, war unser Ziel.

Fall b. Sind $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ zwei benachbarte Zipfel auf $\mathfrak{f}_1$, so trifft einer von beiden k.

In diesem Falle können $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{z}_1$ zu k punktfremd ist, während auf dem Rande von $\mathfrak{z}_2$ ein Sehnenendpunkt P liegt. $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ hat mit dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ ein Stück t_1 bzw. t_2 gemein. t_1 geht über einen Kopf von S; geht t_1 auch über ein Knie, so kann auf $\mathfrak{z}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ wie im Falle a gefunden werden. Andernfalls geht t_2 über alle Knie. Wir betrachten dann alle Schnitte von $\mathfrak{z}_2$ mit Schartetraedern durch Extrema der zentrischen Distanz von t_2. Gibt es darunter einen Querschnitt, der von $\mathfrak{z}_2$ ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück abschneidet, so wird das Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ wie im Falle a bestimmt. Die Annahme, daß es keinen solchen Querschnitt von $\mathfrak{z}_2$ gibt, führt zu einem Widerspruch: Wir betrachten das Schartetraeder durch P und dehnen es stetig in dem Sinne, daß der entstehende Querschnitt auf $\mathfrak{z}_2$ von $\mathfrak{z}_2$ ein Elementarflächenstück abschneidet, das P als Randpunkt besitzt, nicht aber die Ausnahmeecke auf dem Rande von $\mathfrak{z}_2$. Nach Annahme könnte dies solange geschehen, bis man erstmals zu einem von P verschiedenen Extremum der zentrischen Distanz von t_2 gelangte, womit sich ein Widerspruch zu Fall b des 1. Schrittes ergibt.

Fall c. Auf $\mathfrak{f}_1$ liegen keine Ausnahmeecken.

Das Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ kann wie im Falle b gefunden werden, wobei $\mathfrak{f}_1$ an die Stelle von $\mathfrak{z}_2$ tritt.

4. Schritt. *Beseitigung der restlichen Ausnahmeecken von S.*

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{f}_2$ mögen dieselbe Bedeutung wie im 3. Schritt haben, ebenso t_1' und q. Das Schartetraeder durch q sei T_2'. Es schneidet $\mathfrak{f}_2$ in einer geschlossenen Schnittlinie. Ein Stück q' dieses Schnittes berandet zusammen mit t_1' ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$, das auf dem von $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{f}_2$ gebildeten „Endstück" von S liegt und das T_2' nicht durchsetzt. Die Ausnahmeecke von $\mathfrak{f}_2$ liegt daher nicht auf $\mathfrak{m}$. Es beranden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ und ein von q und q' auf T_2' berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ zusammen eine Kugel $\mathfrak{M}$, deren Durchschnitt mit dem „Endstück" von S aus $\mathfrak{m}$ besteht und die mit $\mathfrak{n}$ an T_2' ohne Durchdringung anstößt. Vermöge $\mathfrak{M}$ werden wir das Endstück von S so abbiegen, daß das Knie $\mathfrak{f}_2$ verschwindet.

Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß $\mathfrak{f}_2$ ein äußeres Knie ist. $\mathfrak{M}$ liegt dann innerhalb T_2'. Auf $\mathfrak{m}$ liegt ein Schnittpunkt Q von S und k, der Endpunkt eines auf $\mathfrak{M}$ liegenden Stückes k_1 von k ist. k_1 liegt entweder auf einer zentralen Strecke von k, oder es besteht k_1 aus einem inneren Wege von k und je einem Stück der anstoßenden zentralen Strecken.

Fall a. k_1 liegt auf einer zentralen Strecke von k.

In diesem Falle liegt k_1 zwischen T_2' und dem Schartetraeder durch Q. Wir betrachten die auf $\mathfrak{M}$ liegenden Stücke von S und lassen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ außer Betracht. Durch Deformation von S erreichen wir zunächst, daß kein äußeres

Knie von S auf $\mathfrak{M}$ liegt: Man kann diese Knie zunächst längs geeigneter, zentrisch monotoner Streckenzüge so ausbeulen[23]), daß die Maxima der zentrischen Distanz außerhalb T_2' gelangen, und anschließend von ihrer Ausnahmeecke her (in das Knie hinein) so, daß die Ausnahmeecken ebenfalls außerhalb T_2' gelangen[24]).

Wenn nun auf k_1 außer dem Endpunkt Q kein weiterer Schnittpunkt mit S liegt, so läßt sich ein Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ so bestimmen[25]), daß erstens $\mathfrak{a}$ berandet wird von k_1, einem zentrisch monotonen Streckenzug m auf $\mathfrak{m}$ von Q nach einem Punkte von T_2' und von einem Streckenzug auf T_2', der die Endpunkte von m und k_1 verbindet, daß zweitens S und k von $\mathfrak{a}$ nur in m und k_1 getroffen werden und daß drittens $\mathfrak{a}$ von jedem Schartetraeder zwischen T_2' und Q in nur einem Querschnitt und von dem Schartetraeder durch Q nur in Q getroffen wird. Daß $\mathfrak{a}$ so bestimmt werden kann, erkennt man, wenn man das Schartetraeder durch Q stetig dehnt, weil die Ausnahmeecke von $\mathfrak{k}_2$ nicht auf $\mathfrak{M}$ liegt. Das Knie $\mathfrak{k}_2$ läßt sich nun dadurch beseitigen, daß man das Endstück von S längs $\mathfrak{a}$ entsprechend dem Fall b des 1. Schrittes abbiegt.

Wenn auf k_1 außer Q noch Schnittpunkte mit S liegen, so sind es die Schnitte von k mit dem von $\mathfrak{k}_1$ verschiedenen Kopf $\mathfrak{k}'$ von S. Wenn der an $\mathfrak{k}'$ anstoßende Schenkel nach außen führt, so schneidet er T_2', weil auf $\mathfrak{M}$ keine äußeren Knie mehr liegen, und es kann $\mathfrak{k}'$ nach dem eben beschriebenen Verfahren längs k_1 außerhalb $\mathfrak{M}$ geschoben werden, worauf das aus $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ bestehende Endstück von S wie oben abgebogen werden kann. Wenn der an $\mathfrak{k}'$ anstoßende Schenkel nach innen führt, so läßt sich $\mathfrak{k}'$ längs k_1 ebenfalls aus $\mathfrak{M}$ herausschieben, worauf $\mathfrak{a}$ wie oben bestimmt werden kann.

Fall b. k_1 umfaßt einen inneren Weg von k, hat aber mit S nur einen Endpunkt gemein.

Der Endpunkt Q von k_1 ist Minimum der zentrischen Distanz auf dem Kopf $\mathfrak{k}_1$. Wir beulen zunächst $\mathfrak{k}_1$ längs k_1 so aus, daß der Sehnenendpunkt Q auf die zweite zentrale Strecke von k_1 gerät, daß auf dem ausgebeulten Stück nur ein Extremum der zentrischen Distanz, und zwar ein Minimum innerhalb des Grenztetraeders T_1 von k, entsteht und daß die übrigen Teile von S und die Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{n}$ festbleiben. Dabei geht k in sich über. Daraufhin wird t_1' über das ausgebeulte Stück so deformiert, daß auf t_1' nur ein Minimum der zentrischen Distanz dicht bei dem jetzigen Endpunkt Q von k_1 entsteht, und dabei wird $\mathfrak{g}$ so mitgezogen, daß auf $\mathfrak{g}$ nur eine einzige Ausnahmeecke in der Nähe des bisherigen Minimums der zentrischen Distanz von t_1' entsteht. Diese liegt dann auf dem Rande einer inneren Haube von $\mathfrak{g}$ und kann daher so beseitigt werden, daß T_2' punktweise festbleibt. Nunmehr wird das aus $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{s}_1$ und dem deformierten Knie $\mathfrak{k}_1$ bestehende Endstück von S längs k so verbeult, daß es wieder aus einem Knie, einem Schenkel und einem Kopf besteht und daß der auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ liegende Sehnenendpunkt auf dieselbe zentrale Strecke gerät, auf der jetzt Q liegt. Insgesamt wird also der

[23]) Vgl. [6] § 5, 5. Schritt.
[24]) Vgl. [6] § 6, 2. Schritt.
[25]) Vgl. [6] § 6, 1. Schritt.

Kopf $\mathfrak{k}_1$ von einer zentralen Strecke von k über einen inneren Weg hinweg auf eine andere verschoben. Damit entsteht der Fall a.

Fall c. k_1 umfaßt einen inneren Weg von k und schneidet S.

Auf k_1 liegen also jetzt die beiden Schnittpunkte von k mit dem zweiten Kopf $\mathfrak{k}'$ von S. Liegen diese nicht auf derselben zentralen Strecke wie Q, so kann das Verfahren des Falles b angewandt werden. Liegen beide Schnittpunkte auf derselben zentralen Strecke wie Q, so betrachten wir den an $\mathfrak{k}'$ anstoßenden Schenkel. Führt dieser von $\mathfrak{k}'$ nach außen, so kann zunächst $\mathfrak{k}'$ längs k_1 über den inneren Weg hinweg auf die zweite zentrale Strecke geschoben werden und danach $\mathfrak{k}_1$ wie im Falle b.

Nehmen wir nun an, daß die Schnittpunkte von k mit dem zweiten Knie $\mathfrak{k}'$ auf k_1 auf derselben zentralen Strecke wie Q liegen und daß der an $\mathfrak{k}'$ anstoßende Schenkel $\mathfrak{s}'$ von $\mathfrak{k}'$ nach innen führt. Wie im Falle a erreichen wir zunächst, daß auf $\mathfrak{M}$ nur innere Knie liegen. Durch ein entsprechendes Verfahren können wir erreichen, daß auf $\mathfrak{M}$ alle inneren Knie innerhalb des Grenztetraeders T_1 von k gelangen. Auf $\mathfrak{M}$ liegt möglicherweise außer k_1 noch ein zweites Stück k_2 von k ,das dann einen inneren Weg u_2 von k umfaßt. Wenn dies der Fall ist, so heben wir u_2 unter Verlängerung der anstoßenden zentralen Strecken ins Innere von T_1 ab, so daß u_2 auf ein Schartetraeder zwischen T_1 und der äußersten Ausnahmeecke der auf $\mathfrak{M}$ liegenden inneren Knie gelangt. Dadurch wird es möglich, den Kopf $\mathfrak{k}'$ längs k_1 ähnlich wie im Falle b auf die zweite zentrale Strecke zu verschieben. Daraufhin kann u_2 längs eines geeigneten Elementarflächenstückes auf T_1 zurückdeformiert werden und zwar so, daß wieder zentrale Strecken an u_2 anstoßen und daß S und k_1 von u_2 nicht getroffen werden, d. h. man weiche den Schenkeln von S und dem inneren Weg auf k_1 bei der Deformation aus. Die Gestalt von u_2 ändert sich dabei, sie kann jedoch wie im 1. Schritt von § 6 durch eine zentrische Abbildung, die außerhalb T_2' die Identität ist, wiederhergestellt werden. Nunmehr können die innerhalb T_1 liegenden Knie von S vermöge geeigneter Elementarflächenstücke so abgebogen werden, daß sie wieder außerhalb T_1 gelangen, wobei man den inneren Wegen von k offenbar ausweichen kann. Das Verfahren des Falles b ist nunmehr anwendbar.

Bei den vorangehenden Deformationen werden die Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ in Mitleidenschaft gezogen. Die Deformationen können jedoch stets so vorgenommen werden, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ wieder die Forderungen des § 5 erfüllen. Wir haben erhalten, daß sich stets ein Knie von S beseitigen läßt, solange noch Knie vorhanden sind. Da bei keiner Reduktion neue Knie entstehen, können wir weiterhin annehmen, daß S keine Ausnahmeecken besitzt, also aus den beiden Köpfen und einem einzigen Schenkel besteht.

§ 8. Abschließende Reduktionen für $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$

Wir beseitigen zunächst alle noch verbliebenen Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ und nehmen anschließend im 4. Schritt eine Reduktion der Schnitte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit den Grenztetraedern von k vor.

Nehmen wir an, daß etwa auf $\mathfrak{f}_1$ noch Ausnahmeecken vorhanden sind. Wegen § 5, 3. Schritt und § 6, 1. Schritt liegt jede Ausnahmeecke zwischen den Tetraedern durch die Grenzlinien der beiden Köpfe von S. Wir betrachten auf $\mathfrak{f}_1$ alle diejenigen Schnitte mit Schartetraedern, die von Ausnahmeecken und den singulären Extrema der zentrischen Distanz von r_1 ausgehen. Es existiert dann auf $\mathfrak{f}_1$ ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$, das entweder ein Zipfel ist oder von einem Querschnitt der angegebenen Art abgeschnitten wird und das keine weiteren solchen Schnitte enthält.

1. Schritt. *Reduktion, falls* $\mathfrak{g}$ *ein Zipfel ist.*

Es sei A die Ausnahmeecke auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ und T das Schartetraeder durch A. Mit dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ hat $\mathfrak{g}$ ein Stück t_1' gemein, das auf r_1 liegt, und es wird $\mathfrak{g}$ von t_1' und einem Querschnitt q von $\mathfrak{f}_1$ durch A berandet. t_1' führt mindestens einmal über einen Kopf von S, etwa über den Kopf $\mathfrak{k}_1$. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß $\mathfrak{k}_1$ der innere der beiden Köpfe ist. Auf $\mathfrak{k}_1$ liegt ein reguläres Minimum A_1 der zentrischen Distanz von t_1'. Das Schartetraeder T' durch A_1 schneidet $\mathfrak{f}_1$ in einer geschlossenen Schnittlinie s durch A_1, die auf $\mathfrak{g}$ liegt. Dehnt man T' stetig, so geht s in einen Schnitt über, der auf S entspringt und endet und in q übergeht, wenn T' in T gedehnt ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man die Dehnung über T hinaus fortsetzen, bis der aus s entstandene Schnitt in einen Querschnitt von $\mathfrak{g}$ übergeht, der in einem Extremum der zentrischen Distanz von t_1' auf dem äußeren Kopf von S entspringt, was der Wahl von $\mathfrak{g}$ widerspricht. $\mathfrak{g}$ hat also ähnliche Gestalt wie das im 3. Schritt von § 7 bestimmte, dort ebenfalls mit $\mathfrak{g}$ bezeichnete Elementarflächenstück, und ähnlich wie dort wird eine innerhalb T liegende Kugel $\mathfrak{M}$ bestimmt: q berandet auf T zusammen mit einem geeigneten Stück q' des Schnittes von S und T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$, das an $\mathfrak{K}$ von außen in q' anstößt und mit k nur einen Schnittpunkt gemein hat. q' und t_1' beranden auf S ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$, das innerhalb T liegt und k in einem Sehnenendpunkt Q trifft. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ beranden eine innerhalb T liegende Kugel $\mathfrak{M}$. Ihr Durchschnitt mit k besteht aus einem Stück k_1 von k, ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{K}$ besteht aus $\mathfrak{m}$ nach Bestimmung von $\mathfrak{n}$. k_1 liegt entweder auf einer zentralen Strecke von k oder umfaßt einen inneren Weg. Wir betrachten hier nur den ersten Fall und zeigen im 3. Schritt, daß sich der zweite Fall auf den ersten zurückführen läßt.

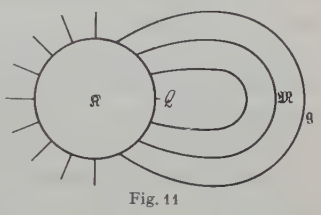

Fig. 11

Im betrachteten Fall liegt der Endpunkt Q von k_1 auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$. Durchläuft man diese Grenzlinie, so trifft man abwechselnd auf die Ränder von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Die Schnitte des Tetraeders durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ haben daher, soweit sie auf $\mathfrak{M}$ liegen, folgendes Aussehen (Fig. 11): Es sind Schnitte, die auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ entspringen und enden, Q trennt die Endpunkte jeder Schnittlinie auf demjenigen Stück der

Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$, das auf $\mathfrak{m}$ liegt, und der äußerste dieser Schnitte liegt auf $\mathfrak{g}$. Weitere Schnitte können nicht vorhanden sein, weil solche geschlossen sein und auf einer Haube von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ liegen müßten, wie man erkennt, wenn man das Schartetraeder durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ in geeignetem Sinne stetig dehnt. Dehnt man das Schartetraeder durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ stetig nach T, so entsteht aus Q ein Querschnitt von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$, etwa von $\mathfrak{f}_2$, während die übrigen auf $\mathfrak{M}$ liegenden Schnitte ihre Gestalt behalten. Von zwei auf dem Tetraeder benachbarten Schnitten liegt nämlich einer auf $\mathfrak{f}_1$, der andere auf $\mathfrak{f}_2$, so daß eine Veränderung des Schnittbildes nur dann möglich wäre, wenn noch Hauben vorhanden wären. Zugleich bemerkt man, daß von den vier Schnitten, die auf T von A ausgehen, nur die beiden, die zusammen q ausmachen, auf $\mathfrak{n}$ liegen.

Auf $\mathfrak{n}$ liegt ein Querschnitt, der den Endpunkt von k_1 mit einem Punkte von r_2 verbindet und von $\mathfrak{f}_2$ ein ausnahmeeckenfreies, auf $\mathfrak{M}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ abschneidet, das Q als innersten Punkt besitzt. Längs dieses Elementarflächenstückes kann $\mathfrak{k}_1$ und das anschließende Schenkelstück so ausgebeult werden, daß die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T gelangt, k in sich übergeht und $\mathfrak{f}_2$ stetig in sich zusammengezogen wird, so daß $\mathfrak{a}$ ins Innere von $\mathfrak{K}$ gelangt, während sich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sonst nicht ändern. Nach dem Verfahren des 3. Schrittes von § 5 kann nun $\mathfrak{k}_1$ so zusammengezogen werden, daß $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T zu liegen kommt. $\mathfrak{g}$ geht dabei in eine Haube über, und die Ausnahmeecke A kann beseitigt werden. Bei dem Verbeulen von $\mathfrak{k}_1$ ist so vorzugehen, daß das anstoßende der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ auch anschließend den Forderungen des § 5 genügt.

2. Schritt. *Reduktion, falls* $\mathfrak{g}$ *von einem Querschnitt abgeschnitten wird, der von einem singulären Extremum der zentrischen Distanz von* r_1 *ausgeht.*

Sei t_1 das Stück von r_1, das $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}_1$ gemein haben. Da r_1 abwechselnd über die beiden Köpfe von S geht, liegt auf t_1 ein Extremum A_1 der zentrischen Distanz, das nicht Endpunkt ist. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir wieder an, daß A_1 auf dem inneren der beiden Köpfe von S liegt.

Es sei jetzt T ein Schartetraeder, das den Schenkel von S schneidet, und zwar so dicht an der Grenzlinie des äußeren Kopfes, daß auf T und außerhalb T keine Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ liegen. T schneidet $\mathfrak{g}$ in einem Querschnitt q, und es berandet q zusammen mit einem Stück t_1' von t_1, das A_1 enthält, ein Elementarflächenstück auf $\mathfrak{g}$, dem wir von jetzt an die Bezeichnung $\mathfrak{g}$ erteilen. Nun kann die Kugel $\mathfrak{M}$ wie im 1. Schritt bestimmt werden, wobei die Bezeichnungen entsprechend zu wählen sind. Der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und k besteht wieder aus einem Stück k_1 von k, wobei k_1 entweder auf einer zentralen Strecke von k liegt oder einen inneren Weg umfaßt. Der zweite Fall wird durch den 3. Schritt auf den ersten zurückgeführt, so daß wir hier nur diesen zu betrachten haben. Der Vorgang entspricht nun dem 1. Schritt. Wie dort kann das Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ bestimmt und S längs $\mathfrak{a}$ so verbeult werden, daß die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T gelangt aber noch innerhalb des Schartetraeders durch die Grenzlinie des

äußeren Kopfes liegt, und es läßt sich dann $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T bringen. Dann hat keine Ausnahmeecke von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ dieselbe zentrische Distanz wie ein Punkt von S, und es verschwinden alle, wenn man Hauben auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beseitigt, weil von einer Ausnahmeecke nicht alle Schnitte mit dem zugehörigen Schartetraeder zu k führen können (vgl. § 6).

3. Schritt. *Reduktion, falls k_1 in den vorangehenden Schritten einen inneren Weg von k umfaßt.*

Sei u_1 dieser innere Weg, die übrigen Bezeichnungen seien dieselben wie im Vorangehenden. Die Reduktion besteht darin, daß $\mathfrak{k}_1$ über u_1 hinweggezogen wird, worauf der bisher betrachtete Sachverhalt des 1. oder 2. Schrittes entsteht.

Der auf $\mathfrak{k}_1$ liegende Endpunkt Q von k_1 ist jetzt der innerste Punkt von S. An $\mathfrak{k}_1$ stößt eines der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ an, etwa $\mathfrak{e}_1$. Die Schnitte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit dem Schartetraeder T' durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ haben, soweit sie auf $\mathfrak{M}$ liegen, das Aussehen von Fig. 11, wobei jetzt nur an Stelle des dort mit Q bezeichneten Punktes ein Querschnitt p etwa von $\mathfrak{f}_2$ tritt, der einen Punkt von k_1 mit einem Punkt von r_2 verbindet. p schneidet von $\mathfrak{f}_2$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{b}$ ab, das auf $\mathfrak{M}$ liegt und das von p, einem Stück von k_1 und einem in Q entspringenden Stück von r_2 berandet wird (Fig. 12). Längs $\mathfrak{b}$ kann $\mathfrak{k}_1$ und das anstoßende Schenkelstück so ausgebeult werden, daß k in sich übergeht, daß auf S keine Ausnahmeecke entsteht und daß $\mathfrak{b}$ ins Innere von $\mathfrak{K}$ gelangt, wobei $\mathfrak{f}_2$ in sich zusammengezogen wird, während sich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sonst nicht ändern. $\mathfrak{e}_1$ ist dabei so mitzunehmen, daß auf $\mathfrak{e}_1$ keine Ausnahmeecken entstehen, daß $\mathfrak{e}_1$ an u_1 vom Inneren des Grenztetraeders T_1 her anstößt und daß der innerste Punkt des deformierten Kopfes $\mathfrak{k}_1$ auf dem Rande von $\mathfrak{e}_1$ liegt. Bei der Deformation gelangt Q außerhalb T'. Die innerhalb T liegenden Stücke von r_1 und r_2 (T hat die Bedeutung wie im 1. oder 2. Schritt) werden nun auf dem ausgebeulten Stück so deformiert, daß wieder jeweils nur ein Minimum der zentrischen Distanz vorhanden ist und daß dieses dicht bei dem jetzigen Sehnenendpunkt Q außerhalb T' liegt. Die Deformation geschieht wie in § 6, 2. Schritt, Fall a. Die anstoßenden Teile von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind mitzuziehen, wobei neue Ausnahmeecken entstehen, die jedoch innerhalb T' liegen. Nun wird $\mathfrak{k}_1$ weiter längs $\mathfrak{e}_1$ und eines Teiles von $\mathfrak{b}$ so verbeult, daß der Schnittpunkt Q' mit k, der anfangs auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ lag, auf dieselbe zentrale Strecke wie Q gelangt, zum Minimum der zentrischen Distanz auf S wird und außerhalb T' zu liegen kommt. Dies muß so geschehen, daß auf S keine Ausnahmeecken entstehen und k in sich übergeht. Q' ist anfangs Minimum der zentrischen

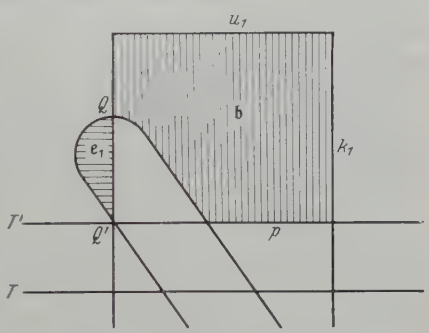

Fig. 12

Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$. Das anstoßende Stück von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ kann bei der Deformation so mitgezogen werden, daß es außerhalb des Grenztetraeders T_1 verbleibt und keine Ausnahmeecken entstehen, weil $\mathfrak{e}_1$ und das betreffende Stück von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ nur den Punkt Q' gemein haben. S liegt nunmehr außerhalb T', und die bei der Deformation entstandenen Ausnahmeecken verschwinden, wenn Hauben auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ wieder beseitigt werden. Der gewünschte Sachverhalt ist damit erreicht.

4. Schritt. *Korrektur der Schnitte durch die regulären Extrema.*

Sei A ein solches Extremum etwa auf r_1, das nicht Sehnenendpunkt ist. Das Schartetraeder T durch A schneidet $\mathfrak{f}_1$ in einer geschlossenen Schnittlinie s durch A, und es berandet s auf T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$, das mit S nur den Punkt A gemein hat. Auf $\mathfrak{f}_1$ berandet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{k}_1$ der Kopf, auf dem A liegt. $\mathfrak{n}$ trifft die Sehne von $\mathfrak{k}_1$ nicht, und $\mathfrak{m}$ ist punktfremd zu k. Auf $\mathfrak{n}$ liegen daher zwei oder keine Schnittpunkte mit k. Wenn k von $\mathfrak{n}$ nicht getroffen wird, so beranden $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eine zu k punktfremde Kugel $\mathfrak{M}$, die mit S nur den Punkt A gemein hat, und in diesem Falle können $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ folgendermaßen deformiert werden:

Auf $\mathfrak{n}$ liegen außer dem Rande s möglicherweise noch geschlossene Schnitte mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Indem man mit einem auf $\mathfrak{n}$ innersten beginnt, können diese der Reihe nach so beseitigt werden, daß keine Ausnahmeecken entstehen. Anschließend wird $\mathfrak{m}$ über $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{n}$ deformiert und so von $\mathfrak{n}$ abgehoben, daß k, S und A festbleiben, A zum Extremum der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ wird und keine Ausnahmeecken entstehen. Das Verfahren soll so oft wie möglich auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ angewandt werden.

§ 9. Nachweis, daß $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ eines der beiden Grenztetraeder von k nicht mehr schneiden und in je einem Stück von k berühren

1. Schritt. *Nachweis, daß auf r_1 und r_2 insgesamt α' reguläre Extrema der zentrischen Distanz vorhanden sind.*

Auf r_1 und r_2 liegen je $\alpha'-1$ Extrema der zentrischen Distanz, die nicht Sehnenendpunkte sind. Unter diesen betrachten wir die singulären. Von jedem solchen Extremum gehen zwei Querschnitte von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ auf dem zugehörigen Schartetraeder aus, die $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ jeweils in drei Elementarflächenstücke zerlegen, wobei eines von beiden Querschnitten und einem Stück des Randes von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ berandet wird, also „zipfelartige" Gestalt hat, während die anderen beiden von je einem Querschnitt und einem Stück des Randes von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ berandet werden. Auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ betrachten wir alle diese Querschnittpaare zugleich, und es mögen γ_1 bzw. γ_2 solche Paare auf $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ liegen. Von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ werden dann γ_1+2 bzw. γ_2+2 Elementarflächenstücke abgeschnitten, die mit den Querschnitten nur Randpunkte gemein haben, wie durch vollständige Induktion nach γ_1, γ_2 folgt. Sei $\mathfrak{g}$ ein solches Elementarflächenstück, etwa auf $\mathfrak{f}_1$. Für die Lage von $\mathfrak{g}$ sind drei Fälle möglich:

a) $\mathfrak{g}$ trifft k nicht,

b) $\mathfrak{g}$ hat mit k ein Stück gemein, das einen Sehnenendpunkt als Endpunkt besitzt,

c) $\mathfrak{g}$ hat zipfelartige Gestalt und mit r_1 nur einen Punkt, die „Spitze des Zipfels", gemein.

Im Falle a liegen auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ genau zwei Extrema der zentrischen Distanz von r_1, nämlich ein singuläres, von dem zwei Querschnitte von $\mathfrak{f}_1$ mit dem zugehörigen Schartetraeder ausgehen, von denen einer oder beide zum Rande von $\mathfrak{g}$ gehören, während das andere Extremum regulär ist. Man erkennt dies, wenn man das Schartetraeder durch das singuläre Extremum in geeignetem Sinne stetig dehnt, so daß auf $\mathfrak{g}$ ein Schnitt entsteht, und diesen Schnitt verfolgt.

Im Falle b erhält man entsprechend zwei Extrema der zentrischen Distanz von r_1, wobei das zweite hier ein Sehnenendpunkt ist. Ist dieses ein reguläres Extremum, so hat $\mathfrak{g}$ mit k nur ein Stück einer zentralen Strecke gemein, andernfalls liegt auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ ein innerer oder ein äußerer Weg von k und nur einer.

Im Falle c liegt auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ nur ein Extremum der zentrischen Distanz von r_1, nämlich die Spitze des Zipfels, außerdem aber genau ein innerer oder äußerer Weg von k, wie sich durch stetige Dehnung des Schartetraeders durch die Spitze des Zipfels in geeignetem Sinne ergibt.

Berücksichtigt man, daß auf k zwei innere und zwei äußere Wege liegen sowie vier Sehnenendpunkte, von denen zwei reguläre Extrema sind, so bemerkt man, daß für $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ zusammen der Fall b genau viermal, der Fall c genau zweimal, der Fall a also $(\gamma_1+\gamma_2-2)$-mal eintritt.

Betrachten wir nun ein Schartetraeder durch ein reguläres Extremum der zentrischen Distanz auf r_1 oder r_2, das nicht Sehnenendpunkt ist. Wenn man das Tetraeder in geeignetem Sinne stetig dehnt, erkennt man, daß das Extremum auf einem Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ liegt, das zum Fall a gehört. Zugleich ergibt sich, daß γ_1 und γ_2 von null verschieden sind, was oben stillschweigend vorausgesetzt wurde. Wir erhalten, daß auf r_1 und r_2 zusammen $2\gamma_1+2\gamma_2-2$ Extrema der zentrischen Distanz liegen, die nicht Sehnenendpunkte sind. Also ist $\gamma_1+\gamma_2=\alpha'$, und dies ist auch die Anzahl der regulären Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2, weil genau zwei Sehnenendpunkte solche Extrema darstellen.

2. Schritt. *Verhalten der Schnitte von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *mit einem stetig gedehnten Schartetraeder.*

Es sei T ein Schartetraeder, das den Schenkel von S schneidet. Es liegt also einer der beiden Köpfe von S innerhalb T, der andere außerhalb. Der Schnitt von S und T sei s. Durchläuft man s einmal, so gelangt man abwechselnd zu Schnitten von r_1 und r_2 mit T, und zwar je α'-mal. Der Durchschnitt von T und $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ besteht daher (Fig. 13) aus vier Querschnitten q_1, q_2, q_3, q_4, die von s nach je einem der vier Schnittpunkte von k und T führen, und

Querschnitten, die auf s entspringen und enden und dabei jeweils genau einen der Querschnitte q_1, q_2, q_3, q_4 umfassen. Weitere Schnitte von T mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind nicht vorhanden, weil es auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ keine Ausnahmeecken mehr gibt. Der Querschnitt q_i $(i=1, 2, 3, 4)$ werde von n_i Querschnitten umfaßt, wobei die Numerierung der q_i entsprechend Fig. 13 gewählt sei. Dann ist

$$n_1+n_2+n_3+n_4=\alpha'-2. \tag{1}$$

Zieht man T stetig auf seinen Mittelpunkt zusammen, so ändert sich das Schnittbild erst dann, wenn T durch die Grenzlinie des inneren Kopfes von S geht, und es verschwindet dort einer der Querschnitte q_i. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß dies q_1 ist. Wird T weiter zusammengezogen, so schrumpfen die n_1 Schnitte, die vorher q_1 umfaßten, der Reihe nach auf einen Punkt zusammen wegen des 4. Schrittes von § 9. Man erhält so zunächst n_1+1 reguläre Extrema der zentrischen Distanz von r_1 und r_2. Nehmen wir an, daß $n_2 \leq n_4$ ist, so verschmelzen bei weiterem Zusammenziehen von T nun n_2 Querschnitte, die q_2 umfassen, mit solchen, die q_4 umfassen, und ein solches Verschmelzen von Querschnitten tritt auch weiterhin solange ein, bis ein Schnitt entsteht, der zwei Punkte von k verbindet. Danach entsteht eine gewisse Anzahl δ geschlossener Schnitte, bis schließlich T durch den innersten Punkt von S geht und zwei Querschnitte auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ vorhanden sind, die je zwei Punkte von k verbinden, und δ geschlossene Schnitte, welche die beiden Querschnitte auf T trennen und bei weiterem Zusammenziehen in δ geschlossene Schnitte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit dem inneren Grenztetraeder T_1 übergehen. Das Verschmelzen der Schnitte ist in Fig. 13 gestrichelt angedeutet.

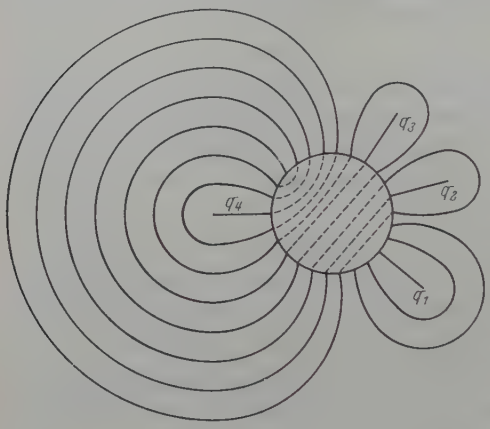

Fig. 13

Um δ zu bestimmen, betrachten wir T in derjenigen Lage, in der q_2 mit einem anderen Querschnitt verschmilzt, und lassen q_2 fort. Auf dem von T aus $\mathfrak{K}$ ausgeschnittenen Elementarflächenstück $\mathfrak{h}$ verbinden wir die Schnitte von T mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ entsprechend dem weiteren Verschmelzen (Fig. 14). Wir erhalten dann zwei nicht geschlossene Wege und δ geschlossene, welche die beiden ersten trennen. Auf dem Rande s von $\mathfrak{h}$ liegen zwei Endpunkte und $2n_3+2n_4$ Schnittpunkte mit diesen Wegen. Die beiden auf s liegenden Endpunkte können über $\mathfrak{h}$ hinweg durch einen Weg w_1 so verbunden werden, daß n_3+n_4 Schnittpunkte entstehen. Entsprechend können die beiden anderen Endpunkte der nicht geschlossenen Wege durch einen Weg w_2 außerhalb $\mathfrak{h}$ verbunden werden. Das entstehende Bild kann als Projektion einer Normal-

form mit zwei Brücken aufgefaßt werden, zu der zusätzlich δ geschlossene Wege gezeichnet sind, welche die beiden äußeren Wege trennen und die Brücken abwechselnd unterkreuzen[26]). Zählt man die geschlossenen Wege mit, so liest man n_3+n_4+1 als die der Torsion entsprechende Zahl und n_4-n_2 oder n_2+n_3+1 als Betrag der der Kreuzungsklasse entsprechenden Zahl ab. Nach einer Bemerkung in § 3 erhält man für die Anzahl der geschlossenen Wege jedenfalls:

$$(2) \qquad \delta = (n_4-n_2,\, n_3+n_4+1)-1 = (n_2+n_3+1,\, n_3+n_4+1)-1,$$

wobei die Klammer den größten gemeinsamen Teiler bezeichnet.

Wir erhalten: Die Anzahl der Schnitte von T_1 mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ ist $(n_2+n_3+1,\, n_3+n_4+1)-1$, wenn die inneren Wege von k, in denen T_1 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ berührt wird, nicht als Schnitte gezählt werden. Zugleich hat sich ergeben, daß auf dem inneren Kopf von S insgesamt $n_1+(n_2+n_3+1,\, n_3+n_4+1)$ reguläre Extrema der zentrischen Distanz von r_1 und r_2 liegen. Diese Aussagen wurden unter der Annahme $n_2 \leqq n_4$ hergeleitet, gelten aber wegen der Symmetrie in n_2 und n_4 allgemein.

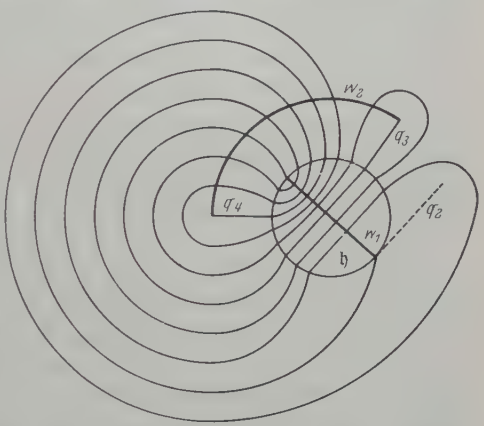

Fig. 14

3. Schritt. *Nachweis, daß eines der beiden Grenztetraeder von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *nicht geschnitten wird.*

Das im Vorangehenden benutzte Tetraeder T betrachten wir wieder in der Ausgangslage (Fig. 13) und dehnen es stetig bis zur Grenzlinie des äußeren Kopfes von S. Es verschwindet dann einer der Querschnitte q_i. Dies kann nicht q_1 sein, da sonst r_1 oder r_2 mit den Köpfen nur die Endpunkte gemein hätte und somit $\alpha'=1$ wäre, was ausgeschlossen wurde. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem q_3 oder einer der beiden Querschnitte q_2, q_4 verschwindet.

Fall a. Auf der Grenzlinie des äußeren Kopfes verschwindet q_2 *oder* q_4.

Wir können annehmen, daß q_2 verschwindet, der andere Fall entsteht durch Umbezeichnung. Entsprechend dem 2. Schritt ergeben sich auf dem äußeren Kopf $n_2+(n_3+n_4+1,\, n_1+n_4+1)$ reguläre Extrema der zentrischen Distanz von r_1 und r_2. Wegen der beiden vorangehenden Schritte und Gl. (1) muß sein

$$(3) \qquad n_3+n_4+2 = (n_2+n_3+1,\, n_3+n_4+1)+(n_1+n_4+1,\, n_3+n_4+1).$$

Diese Beziehung kann aber nur bestehen, wenn einer der beiden größten gemeinsamen Teiler gleich 1, der andere gleich n_3+n_4+1 ist. Hieraus folgt

[26]) Der Sachverhalt läßt sich leicht verfolgen, wenn man das Schartetraeder durch den innersten Punkt von S stetig dehnt.

wegen Gl. (2) und der entsprechenden Gleichung für das äußere Grenztetraeder, daß eines der beiden Grenztetraeder von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird.

Fall b. Auf der Grenzlinie des äußeren Kopfes verschwindet q_3.

Dieser Fall ist nicht möglich. Entsprechend Gl. (3) erhielte man

$$(3\,a) \qquad n_2+n_4+2=(n_2+n_3+1,\, n_3+n_4+1)+(n_1+n_2+1,\, n_1+n_4+1).$$

Nach Definition von β' erhielte man ferner, daß unter der unwesentlichen Annahme $n_2 \leqq n_4$ entweder $|\beta'|=n_1+2n_2+n_3+2$ oder $\alpha'-|\beta'|=n_1+2n_2+n_3+2$ wäre. Wegen der Teilerfremdheit von α' und β' und wegen Gl. (1) müßte jedenfalls sein

$$(4\,a) \qquad (n_1+2n_2+n_3+2,\, n_1+n_2+n_3+n_4+2)=1.$$

Gln. (3a) und (4a) sind gleichwertig mit

$$n_2+n_4+2=(n_2+n_3+1,\, n_4-n_2)+(n_1+n_2+1,\, n_4-n_2)$$
$$(n_1+2n_2+n_3+2,\, n_4-n_2)=1.$$

Diese Gleichungen widersprechen sich: Die zweite besagt, daß $n_4 \neq n_2$ ist und daß die beiden Teiler von n_4-n_2 auf der rechten Seite der ersten Gleichung zueinander teilerfremd sind. Dann kann aber ihre Summe nicht größer als n_4-n_2+1 sein.

4. Schritt. *Nachweis, daß ein Grenztetraeder, das von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *nicht geschnitten wird, von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *in je einem Stück von* k *berührt wird.*

Der Nachweis erfolgt indirekt. Nehmen wir etwa an, daß das äußere Grenztetraeder T_2 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird und von einem der beiden Elementarflächenstücke, etwa von $\mathfrak{f}_1$, in beiden äußeren Wegen von k berührt wird. Wir können die Bezeichnungen des Falles a im 3. Schritt zugrunde legen. Es gelten also Gln. (1), (2) und (3). Betrachten wir wieder den Schnitt mit einem Schartetraeder T zwischen den beiden Köpfen von S (Fig. 13), so müßten q_1, q_3 und q_4 auf $\mathfrak{f}_1$ und q_2 auf $\mathfrak{f}_2$ liegen. Da auf T die Schnitte mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ abwechseln, müßten n_1+n_4 und n_3+n_4 ungerade sein, was der Aussage $(n_1+n_4+1,\, n_3+n_4+1)=1$, daß also T_2 nicht geschnitten wird, widerspricht.

§ 10. Abschluß des Beweises

$\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ schneiden eines der beiden Grenztetraeder T_1, T_2 von k nicht. Nehmen wir zunächst an, daß dies für das äußere Grenztetraeder T_2 der Fall ist. Dann gibt es ein Tetraeder T zwischen T_1 und T_2, das S im Inneren enthält und $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ in nur je einem Querschnitt schneidet, wobei dieser Querschnitt $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ in ein außerhalb T liegendes und ein innerhalb T liegendes Elementarflächenstück zerlegt.

Längs der innerhalb T liegenden Stücke von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beulen wir $\mathfrak{R}$ so aus, daß der Durchschnitt von T und $\mathfrak{R}$ aus zwei Elementarflächenstücken $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ auf S besteht, wobei $\mathfrak{h}_1$ bzw. $\mathfrak{h}_2$ den bisherigen Schnitt von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit T umfaßt. Das Ausbeulen soll so geschehen, daß dabei k in sich übergeht und $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ auf die außerhalb T liegenden Stücke zusammengezogen werden. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ verlieren dabei ihre bisherige Gestalt, jedoch spielt diese

keine Rolle mehr. Nun bildet $\mathfrak{R}$ zusammen mit der Kugel, die das „Äußere" von T bezüglich der S^3 ausmacht, einen Vollring, für den $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ Meridianflächen sind. Dieser Vollring ist unverknotet. Man erhält nämlich leicht eine Seele, die eine verallgemeinerte Brückendarstellung mit einer Brücke ist, wenn man vor dem Ausbeulen die Sehnen von $\mathfrak{R}$ innerhalb $\mathfrak{R}$ durch einen zentrisch monotonen Streckenzug verbindet und diesen vermöge zweier geeigneter Stücke der Brücken von k und eines Weges auf T_2 zu einer Knotenlinie ergänzt. Daraus folgt[27]), daß das Komplement von $\mathfrak{R}$ bezüglich des Inneren von T ein unverknoteter Vollring ist, für den die Ränder von $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ Breitenkreise sind, und es läßt sich $\mathfrak{R}$ bei festem k und festem $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ in das Innere von T überführen[28]).

In die Sehnen von $\mathfrak{R}$ und der komplementären Kugel $\mathfrak{L}$ spannen wir nun Elementarflächenstücke $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2$ bzw. $\bar{\mathfrak{f}}_1, \bar{\mathfrak{f}}_2$ ein, indem wir diese Sehnen von Z aus auf T projizieren. Nach Hilfssatz 3 lassen sich die auf $S = T$ liegenden Randstücke s_1 und s_2 der in die Sehnen von $\mathfrak{R}$ eingespannten Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ in diejenigen von $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2$ dadurch überführen, daß man sie auf T kombinatorisch isotop deformiert. Dies kann auch durch eine zentrische Abbildung geschehen, die auf T_1, T_2 und k die Identität ist, und durch eine s-Abbildung, die auf k und außerhalb T die Identität ist, kann noch erreicht werden, daß $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ mit $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2$ zusammenfallen. Nun sind nach Hilfssatz 3 die auf T liegenden Randstücke r_1 und r_2 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ kombinatorisch isotop zu den entsprechenden Randstücken $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ von $\bar{\mathfrak{f}}_1$ und $\bar{\mathfrak{f}}_2$. Bei dieser Deformation ändert sich das Kreuzungsschema von r_1 und r_2 mit den Randstücken s_1 und s_2 von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ nicht:

Durch Deformation von s_1, s_2, r_1, r_2, die s_1 und s_2 in sich überführt, kann zunächst erreicht werden, daß der Durchschnitt von r_1 und r_2 mit $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ nur aus den Endpunkten und solchen Schnittpunkten besteht, die nicht auf s_1 oder s_2 liegen. Die weitere Deformation erfolgt wie im 1. Schritt des Beweises von Satz 2 (§ 2). Es erfolgen jeweils Deformationen über Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}$, die von je einem Stück w' auf $\bar{r}_1$ oder $\bar{r}_2$ und einem Stück v' auf r_1 oder r_2 berandet werden, wobei w' außer seinen Endpunkten keine Schnittpunkte mit r_1 und r_2 besitzt und $\mathfrak{g}$ keinen der Endpunkte von r_1 und r_2 im Inneren enthält. s_1 und s_2 müssen auf einem solchen Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ Querschnitte bilden, die jeweils einen Punkt von w' mit einem Punkt von v' verbinden. Andernfalls würde w' oder v' zweimal hintereinander von s_1 oder s_2 geschnitten. Dies ist aber nicht möglich, weil s_1, s_2 mit r_1, r_2 und mit $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ Kreuzungsschemata von Normalformen bilden, wie aus der Wahl der zugehörigen Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ folgt. Jede Deformation läßt sich also durch eine s-Abbildung von T auf sich bewirken, die s_1 und s_2 in sich überführt, und dies kann auch durch eine zentrische Abbildung geschehen, die auf k, T_1 und T_2 die Identität ist.

Wir haben erreicht, daß r_1 und r_2 mit $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ zusammenfallen. Unter der Annahme, daß T_2 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird, ergibt sich also

[27]) [7] § 7, Satz 2.
[28]) [7] § 8.

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Wenn T_1 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird, läßt sich entsprechend vorgehen, wobei nur $\mathfrak{K}$ in das Äußere eines geeigneten Tetraeders überzuführen ist. Nach § 3 ergibt sich entsprechend $\alpha = \alpha'$ und $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α. Der Beweis des Satzes ist damit beendet.

Anhang: Knoten der Alexander-Briggsschen Tabelle, für die Darstellungen mit zwei Brücken gefunden wurden

Alle Knoten der ALEXANDER-BRIGGSschen Tabelle[29]) besitzen Brückendarstellungen mit drei Brücken. Dies wurde mit Hilfe der Tatsache festgestellt, daß sich in einer Brückendarstellung eines Knotens eine Brücke stets dann beseitigen läßt, wenn sie von einem der beiden anstoßenden äußeren Wege nicht unterkreuzt wird. Brückendarstellungen mit zwei Brücken wurden für die folgenden Knoten gefunden:

Bezeichnung in Tabelle	Normalform	Bezeichnung in Tabelle	Normalform	Bezeichnung in Tabelle	Normalform
3,1	(3,1)	8,3	(17,13)	9,7	(29,9)
4,1	(5,3)	8,4	(19,5)	9,8	(31,11)
5,1	(5,1)	8,6	(23,7)	9,9	(31,7)
5,2	(7,3)	8,7	(23,5)	9,10	(33,23)
6,1	(9,5)	8,8	(25,9)	9,11	(33,7)
6,2	(11,3)	8,9	(25,7)	9,12	(35,13)
6,3	(13,5)	8,11	(27,17)	9,13	(37,11)
7,1	(7,1)	8,12	(29,17)	9,14	(37,23)
7,2	(11,5)	8,13	(29,11)	9,15	(39,17)
7,3	(13,3)	8,14	(31,13)	9,17	(39,25)
7,4	(15,11)	9,1	(9,1)	9,18	(41,17)
7,5	(17,5)	9,2	(15,7)	9,20	(41,11)
7,6	(19,7)	9,3	(19,3)	9,21	(43,25)
7,7	(21,13)	9,4	(21,5)	9,27	(49,19)
8,1	(13,7)	9,5	(23,17)	9,31	(55,21)
8,2	(17,3)	9,6	(27,5)		

Nach dem Korollar zu Satz 4 sind die Knoten 4,1; 6,3; 8,3; 8,9; 8,12 der Tabelle amphicheiral, was bereits von GOERITZ [2] bemerkt wurde.

Literatur

[1] BANKWITZ, C., u. H. G. SCHUMANN: Über Viergeflechte. Abh. Math. Sem. Hamburg **10**, 263—284 (1934). — [2] GOERITZ, L.: Bemerkungen zur Knotentheorie. Abh. Math. Sem. Hamburg **10**, 201—210 (1934). — [3] GRAEUB, W.: Die semilinearen Abbildungen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 4. Abh. **1950**. — [4] REIDEMEISTER, K.: Knotentheorie. Berlin 1932. — [5] REIDEMEISTER, K.: Homotopieringe und Linsenräume. Abh. Math. Sem. Hamburg **11**, 102—109 (1936). — [6] SCHUBERT, H.: Über eine numerische Knoteninvariante. Math. Z. **61**, 245—288 (1954). — [7] SCHUBERT, H.: Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 131—286 (1953). — [8] SCHUBERT, H.: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. **1949**. — [9] SEIFERT, H.: Schlingknoten. Math. Z. **52**, 62—80 (1949). — [10] TORRES, G., and R. H. FOX: Dual presentations of the group of a knot. Ann. Math. (2) **59**, 211—218 (1954).

[29]) Siehe REIDEMEISTER [4].

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. Dezember 1955)

SHAH, S. M., and S. K. SINGH
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 171—174 (1956)

On the derivative of a meromorphic function with maximum defect

By

S. M. SHAH and S. K. SINGH

Let $f(z)$ be a meromorphic function (not a constant) of finite order and $T(r, f)$ the characteristic function of $f(z)$. It is known that [1, p. 104]

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leq 2 - \mu(\infty) - \delta(\infty). \tag{1}$$

If $\delta(a_1) = \delta(a_2) = 1$ where $|a_i| < \infty$, $i = 1, 2$, then [2] $T(r, f') \sim 2\,T(r, f)$ as $r \to \infty$. We prove here

THEOREM: *If* $|a_i| < \infty$, $0 < |b_i| < \infty$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ *then*

$$\Delta(f', 0) \liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \geq \sum_1^\infty \delta(a_i) \tag{2}$$

$$\Delta(f', 0)\{2 - \mu(\infty) - \delta(\infty)\} \geq \{1 + \Delta(f', 0) - \delta(f', 0)\} \sum_1^\infty \delta(a_i), \tag{3}$$

where

$$\Delta(f', 0) = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')}.$$

COROLLARY: *If* $\sum_1^\infty \delta(a_i) = 2$,

then

$$T(r, f') \sim 2\,T(r, f), \qquad \mu(\infty) = 0,$$

$$\delta(f', 0) = 1, \qquad \delta(f', \infty) = 0$$

and

$$2 \sum_1^\infty \delta(f', b_i) \leq 1.$$

PROOF. Consider first the case when $f(z)$ is a rational function:

$$f(z) = \frac{a z^n + \cdots}{A z^m + \cdots}.$$

If $m < n$, then it is easily seen that

$$\sum_1^\infty \delta(a_i) = 0$$

and (2) and (3) obviously hold.

If $m > n$, then

$$T(r, f) \sim m \log r,$$

$$T(r, f') \sim 2m \log r,$$

$$\delta(\infty) = \mu(\infty) = 0,$$

$$\sum \delta(a_i) = \delta(0) = 1 - \frac{n}{m},$$

$$\Delta(f', 0) = \frac{m - n + 1}{2m}$$

and (2) and (3) hold.

The case $m = n$ can be dealt with in a similar way.

Let now $f(z)$ be a meromorphic function (not a rational function). It is known that there can be at most a countably infinite number of numbers α such that $\delta(\alpha) > 0$.

Let $E = (A_i)_1^\infty, F = (B_i)_1^\infty$ be two sets of numbers such that $|A_i| < \infty$, $0 < |B_i| < \infty$ for $i = 1, 2, 3, \ldots$ and such that if[1]) $d \neq \infty$, $d \in CE$ then $\delta(d) = \delta(f, d) = 0$ and such that if $D \neq 0, \neq \infty$, $D \in CF$, then $\delta(f', D) = 0$; $\delta(f, A_i)$ and $\delta(f', B_i)$ may be positive or zero.

Let $\sum_1^\infty \delta(A_i) = x$. Given $\varepsilon > 0$ we can choose $(A_i)_1^p$ and $(B_i)_1^q$ such that

$$\sum_{p+1}^{\infty} \delta(A_i) < \varepsilon, \quad \sum_{q+1}^{\infty} \delta(f', B_i) < \varepsilon.$$

Then [3, p. 298]

$$p < \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \sum_1^p \frac{N(r, A_i)}{T(r, f)} - \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f)} + o(1), \tag{4}$$

$$p + \liminf_{r \to \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leq \liminf_{r \to \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \sum_1^p \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, A_i)}{T(r, f)}.$$

Set $\beta = \liminf_{r \to \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)}$; we have

$$p + \beta \{1 - \Delta(f', 0)\} \leq \beta + \sum_1^p \{1 - \delta(A_i)\},$$

$$\sum_1^p \delta(A_i) \leq \beta \Delta(f', 0),$$

$$\sum_1^\infty \delta(a_i) \leq x \leq \beta \Delta(f', 0) + \varepsilon$$

and (2) follows. Further we have from (4)

$$p + \limsup_{r \to \infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f')} \liminf_{r \to \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leq \limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} + \sum_1^p \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, A_i)}{T(r, f)}.$$

[1]) By CE we denote the complement of set E.

Hence from (2)

$$\Delta(f',0)\,p+\{1-\delta(f',0)\}\sum_1^\infty\delta(A_i)\leqq\Delta(f',0)\{2-\mu(\infty)-\delta(\infty)\}+\Delta(f',0)\{p-\sum_1^p\delta(A_i)\},$$

$$\{1-\delta(f',0)\}\sum_1^\infty\delta(A_i)\leqq\Delta(f',0)\{2-\mu(\infty)-\delta(\infty)\}-\Delta(f',0)\sum_1^\infty\delta(A_i)+\varepsilon.$$

Hence

$$\{1+\Delta(f',0)-\delta(f',0)\}\sum_1^\infty\delta(a_i)\leqq\{1+\Delta(f',0)-\delta(f',0)\}\sum_1^\infty\delta(A_i)\leqq\Delta(f',0)\{2-\mu(\infty)-\delta(\infty)\}+\varepsilon$$

and (3) follows.

Corollary. Since $\Delta(f',0)\leqq 1$ we have

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}\geqq\sum_1^\infty\delta(a_i)=2$$

and so from (1) we get

$$T(r,f')\sim 2\,T(r,f)\quad\text{and}\quad\mu(\infty)=0.$$

Further we have

$$(p-1)\,T(r,f)<\sum_1^p\overline{N}(r,a_i)+\overline{N}(r,f)+O(\log r).$$

Hence

$$(p-1)\leqq\limsup_{r\to\infty}\sum_1^p\frac{\overline{N}(r,a_i)}{T(r,f)}+\liminf_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}$$

$$\leqq p-\sum_1^p\delta(a_i)+\liminf_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}$$

$$\leqq p-2+\varepsilon+\liminf_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}.$$

Hence

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,f)}{T(r,f)}=1.$$

Now

$$N(r,f')=N(r,f)+\overline{N}(r,f)\sim 2\,T(r,f),\qquad T(r,f')\sim 2\,T(r,f),$$

and so

$$\delta(f',\infty)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f')}{T(r,f')}=0.$$

From (2) we have $\Delta(f',0)=1$ and from (3)

$$2\delta(f',0)\geqq 2\quad\text{and so}\quad\delta(f',0)=1.$$

Further [3, p. 303]

$$p\,q < \frac{\bar{N}(r,f)}{T(r,f)} + q\sum_{1}^{p}\frac{N(r,A_i)}{T(r,f)} + \sum_{1}^{q}\frac{N\left(r,\frac{1}{f'-B_i}\right)}{T(r,f)} - \\ - \left\{(q-1)\,\frac{N\left(r,\frac{1}{f'}\right)}{T(r,f)} + \frac{N\left(r,\frac{1}{f''}\right)}{T(r,f)}\right\} + o(1).$$

And so

$$p\,q \leqq 1 + q\sum_{1}^{p}\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,A_i)}{T(r,f)} + 2\sum_{1}^{q}\limsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f'-B_i}\right)}{T(r,f')}$$

$$\leqq 1 + q\left\{p - \sum_{1}^{p}\delta(A_i)\right\} + 2\left\{q - \sum_{1}^{q}\delta(f',B_i)\right\}$$

$$\leqq 1 + p\,q - q(2-\varepsilon) + 2q - 2\sum_{1}^{q}\delta(f',B_i).$$

And so

$$2\sum_{1}^{\infty}\delta(f',B_i) \leqq 1 + (q+2)\,\varepsilon$$

which gives

$$2\sum_{1}^{\infty}\delta(f',b_i) \leqq 2\sum_{1}^{\infty}\delta(f',B_i) \leqq 1.$$

References

[1] Nevanlinna, R.: Le theorème de Picard-Borel et la theorie des fonctions méromorphes. Paris 1929. — [2] Shah, S. M., and S. K. Singh: Borel's theorem on a-points and exceptional values of Entire and Meromorphic Functions. Math. Z. **59**, 88—93 (1953). — [3] Milloux, H.: Les dérivées des fonctions méromorphes et la théorie des défauts. Ann. Ecole Normale Superieure **64**, 289—316 (1947).

Department of Mathematics, Muslim University, Aligarh (India)

D. S. College, Aligarh

(Eingegangen am 2. Dezember 1955)

Grauert, H., u. R. Remmert
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 175—194 (1956)

Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen

Von

Hans Grauert und Reinhold Remmert

Die von K. Oka [10] und P. Lelong [9] eingeführten plurisubharmonischen Funktionen haben sich als ein unentbehrliches Hilfsmittel in der Theorie der Holomorphiegebiete erwiesen. K. Oka konnte zeigen, daß in jedem unverzweigten, pseudokonvexen Riemannschen Gebiet G über dem C^n eine holomorphe Funktion existiert, deren analytisches Gebilde mit G übereinstimmt. Er benutzt in seinem Beweis wesentlich die Eigenschaften der Funktion $-\ln \delta(x)$, die in unverzweigten, pseudokonvexen Gebieten plurisubharmonisch ist. Dabei bezeichnet $\delta(x)$ die euklidische Randdistanzfunktion in G. Es waren also die Untersuchungen über plurisubharmonische Funktionen, die nach langen vergeblichen Versuchen schließlich zu einem Nachweis der Richtigkeit der Levischen Vermutung führten.

Man hat gelegentlich vermutet [8], daß sich — analog dem Verhalten holomorpher Funktionen — jede in einem unverzweigten Riemannschen Gebiete G plurisubharmonische Funktion zu einer in der Holomorphiehülle $\mathfrak{H}(G)$ plurisubharmonischen Funktion fortsetzen läßt. Da $-\ln \delta(x)$ bei Annäherung von x an den Rand von G gegen $+\infty$ strebt und daher sicher nicht fortsetzbar ist, wäre dadurch schon eine Lösung des Levischen Problems gegeben worden. Inzwischen wurde aber diese Vermutung widerlegt [2]. Jedoch blieb das Problem offen, ob nicht für plurisubharmonische Funktionen ein Analogon zu den bekannten Riemannschen Sätzen über hebbare Singularitäten holomorpher Funktionen gilt, was offenbar eine schwächere Aussage ist. Die Sätze von Riemann drücken nämlich aus, daß man jede holomorphe Funktion f, die in einer Umgebung einer analytischen Menge $A \neq G$ eines Gebietes G des C^n holomorph ist, in A hinein holomorph fortsetzen kann. Dabei muß man, falls A von der maximalen Dimension $n-1$ ist, noch zusätzlich die Voraussetzung machen, daß $|f|$ in der Nähe jedes Punktes von A beschränkt ist.

Wir werden zeigen[1]):

I. *Ist G ein Gebiet im C^n und $A \neq G$ eine analytische Menge in G, so ist jede in $G-A$ plurisubharmonische Funktion $p(\mathfrak{z})$, die in der Nähe eines jeden Punktes $\mathfrak{z} \in A$ nach oben beschränkt ist, auf genau eine Weise zu einer im gesamten Gebiet G plurisubharmonischen Funktion $\breve{p}(\mathfrak{z})$ fortsetzbar.*

[1]) Die Resultate der vorliegenden Arbeit wurden in einer Comptes-Rendus-Note angekündigt; vgl. [5].

II. *Ist A eine höchstens $(n-2)$-dimensionale analytische Menge in G, so existiert die plurisubharmonische Fortsetzung von $p(\mathfrak{z})$ in G stets, auch ohne die einschränkende Voraussetzung der Beschränktheit nach oben.*

Diese beiden Aussagen lassen sich sofort verallgemeinern, indem an Stelle analytischer Mengen beliebige dünne Mengen von G zugelassen werden. *Dünne Mengen* sind abgeschlossene Mengen in G, die lokal in analytischen Mengen enthalten sind.

Zur Charakterisierung der Pseudokonvexität abstrakter Gebilde, der sog. *komplexen Räume*, scheint es zweckmäßig, den Begriff der plurisubharmonischen Funktion auch hier zu kennen. In der vorliegenden Arbeit wird eine Definition für plurisubharmonische Funktionen in solchen komplexen Räumen gegeben; es wird bewiesen, daß dieselbe für Gebiete des Zahlenraumes mit der üblichen Definition übereinstimmt.

Die Fortsetzungssätze werden nun gleich für komplexe Räume formuliert und bewiesen; dabei macht die Existenz nichtuniformisierbarer Punkte in diesen Räumen besondere Schwierigkeiten. Es wird der Satz von F. HIRZEBRUCH [7] über die Auflösbarkeit der nichtuniformisierbaren Punkte in zweidimensionalen komplexen Räumen mittels Modifikationen herangezogen; ferner wird der folgende interessante Hilfssatz benutzt:

Ist $\mathfrak{R}$ eine zusammenhängende, endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung eines Polyzylinders Z im C^n, so ist für fast alle eindimensionalen analytischen Ebenen E die Beschränkung der Überlagerung auf $E \cap Z$ eine zusammenhängende RIEMANNsche *Fläche* (hinsichtlich der genauen Formulierung vgl. § 3, Hilfssatz 3).

Die Fortsetzungssätze gestatten Anwendungen auf die Theorie der Modifikationen. Ferner gewinnt man mit ihrer Hilfe eine Verallgemeinerung des OKAschen Satzes über die Äquivalenz der unverzweigten Holomorphiegebiete mit den pseudokonvexen Gebieten. Hierüber soll in einer weiteren Arbeit berichtet werden (vgl. auch [5]).

§ 1. Der Begriff der plurisubharmonischen Funktion Formulierung der Fortsetzungssätze

1. In Gebieten G des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n kennt man den Begriff der plurisubharmonischen Funktion, den wir hier in leichter Abänderung der Definition von P. LELONG [9] wie folgt fassen:

Def. 1a. Eine Funktion $p(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{z}=(z_1, \ldots, z_n)$, in einem Gebiete G des C^n heißt plurisubharmonisch in G, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

α) Die Werte von $p(\mathfrak{z})$ sind reelle Zahlen oder $-\infty$.

β) $p(\mathfrak{z})$ ist in jedem Punkt $\mathfrak{z}_0 \in G$ halbstetig nach oben: $\overline{\lim_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0}} p(\mathfrak{z}) \leq p(\mathfrak{z}_0)$.

γ) Ist E irgendeine eindimensionale analytische Ebene im C^n, die G schneidet, so ist die Beschränkung von $p(\mathfrak{z})$ auf $G \cap E$ eine subharmonische Funktion in $G \cap E$.

Dabei nennt man bekanntlich eine in einer offenen Menge B der komplexen Zahlenebene C definierte Funktion $s(z)$ subharmonisch in B, wenn folgendes gilt:

α') *Die Werte von* $s(z)$ *sind reelle Zahlen oder* $-\infty$.

β') $s(z)$ *ist in jedem Punkt* $z^{(0)} \in B$ *halbstetig nach oben:* $\overline{\lim_{z \to z^{(0)}}} s(z) \leq s(z^{(0)})$.

γ') *Ist* W *ein beliebiges Gebiet in* B *und* $h(z)$ *eine beliebige in* W *harmonische Funktion, so besitzt die Funktion* $h(z) - s(z)$, *sofern sie nicht in* W *konstant ist, kein Maximum in* W *(Maximumprinzip).*

Offensichtlich ist jede harmonische Funktion, da sie dem Maximumprinzip genügt, auch subharmonisch. Ferner ist eine Funktion in einem Gebiete der Zahlenebene genau dann dort plurisubharmonisch, wenn sie dort subharmonisch ist.

2. Wir notieren einige bekannte Eigenschaften plurisubharmonischer Funktionen. Die mindestens zweimal stetig differenzierbaren plurisubharmonischen Funktionen können nach Lelong [9] auch wie folgt charakterisiert werden:

a) *Eine in einem Gebiete* G *des* C^n *mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion* $p(\mathfrak{z})$ *ist genau dann plurisubharmonisch in* G, *wenn die quadratische Form* $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 p}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$ *überall in* G *positiv semi-definit ist.*

Beliebige plurisubharmonische Funktionen lassen sich nach Oka [10] stets durch differenzierbare plurisubharmonische Funktionen approximieren in folgendem Sinne:

b) *Ist* $p(\mathfrak{z})$ *irgendeine plurisubharmonische Funktion in einem Gebiete* $G \subset C^n$, *so gibt es zu jedem relativ-kompakt in* G *liegenden Gebiet* G' *eine absteigende Folge von in* G' *k-mal stetig differenzierbaren plurisubharmonischen Funktionen* $p_\nu(\mathfrak{z})$, *die in* G' *gegen* $p(\mathfrak{z})$ *konvergiert* ($k \geq 1$, *beliebig*).

Eine Aussage über den Limes einer Folge plurisubharmonischer Funktionen macht (vgl. [8])

c) *Die Grenzfunktion einer absteigenden Folge von plurisubharmonischen Funktionen in einem Gebiete* G *des* C^n *ist stets eine in* G *plurisubharmonische Funktion.*

Ist $P = \{p_\iota(\mathfrak{z}),\ \iota \in I\}$, I eine Indexmenge, eine Familie von in einem Gebiete G des C^n reellwertigen Funktionen ($-\infty$ sei als Wert zugelassen), die im Innern von G gleichmäßig nach oben beschränkt sind, so verstehen wir unter der *oberen Einhüllenden* $\hat{P}(\mathfrak{z})$ von P die kleinste nach oben halbstetige Funktion, für die gilt: $\hat{P}(\mathfrak{z}) \geq p_\iota(\mathfrak{z})$ für alle $\mathfrak{z} \in G$ und alle $\iota \in I$.

Die obere Einhüllende existiert stets. Es gilt [8]:

d) *Die obere Einhüllende* $\hat{P}(\mathfrak{z})$ *einer Familie* $P = \{p_\iota(\mathfrak{z})\}$ *von in einem Gebiete* G *des* C^n *plurisubharmonischen, im Innern von* G *gleichmäßig nach oben beschränkten Funktionen* $p_\iota(\mathfrak{z})$ *ist eine plurisubharmonische Funktion in* G.

3. In diesem Abschnitt beweisen wir zwei Sätze über plurisubharmonische Funktionen, die wir in dieser Arbeit benötigen.

Die Bedingung γ) in Definition 1a läßt sich wie folgt abschwächen:

Satz 1. Eine in einem Gebiete G des C^n definierte Funktion $p(\mathfrak{z})$, die den Bedingungen α) und β) genügt, ist bereits dann plurisubharmonisch in G, wenn folgendes gilt:

Es gibt im Raum der eindimensionalen analytischen Ebenen durch G eine dichte Menge M, derart, daß die Beschränkung von $p(\mathfrak{z})$ auf jede Ebene $E \in M$ eine subharmonische Funktion in $G \cap E$ ist.

Beweis: Es sei $p(\mathfrak{z})$ eine beliebige Funktion in G, die den Voraussetzungen des Satzes genügt; es sei

$$E_0 : \{z_\nu = a_\nu^{(0)} t + b_\nu^{(0)}, \qquad \nu = 1, \ldots, n\}$$

irgendeine eindimensionale analytische Ebene, die G schneidet. Wir müssen zeigen, daß $p(a_1^{(0)} t + b_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)} t + b_n^{(0)})$ subharmonisch in $G \cap E_0$ ist. Mit M_ε, $\varepsilon > 0$, werde die Menge aller Ebenen E_ι: $\{z_\nu = a_\nu^{(\iota)} t + b_\nu^{(\iota)}, \ \nu = 1, \ldots, n\}$ bezeichnet, die zu M gehören und für die gilt: $|a_\nu^{(\iota)} - a_\nu^{(0)}| < \varepsilon$, $|b_\nu^{(\iota)} - b_\nu^{(0)}| < \varepsilon$, $\nu = 1, \ldots, n$. Da M dicht im Raum aller Ebenen liegt, ist M_ε für kein $\varepsilon > 0$ leer.

Wir bilden zu jedem ε die zugehörigen Funktionsmengen

$$P_\varepsilon = \{p_\iota(t) = p(a_1^{(\iota)} t + b_1^{(\iota)}, \ldots, a_n^{(\iota)} t + b_n^{(\iota)})\}.$$

Die auftretenden Funktionen sind in ihren Definitionsbereichen sämtlich nach Voraussetzung subharmonisch und offensichtlich im Innern derselben gleichmäßig nach oben beschränkt. Nach 2.d) ist daher die obere Einhüllende $\hat{P}_\varepsilon(t)$ einer jeden Menge P_ε eine in ihrem Definitionsbereich subharmonische Funktion. Wir betrachten insbesondere die Folge $\hat{P}_{1\,x}(t)$. Dieselbe ist monoton fallend; daher ist nach 2.c) die Grenzfunktion $\lim_{x \to \infty} \hat{P}_{1\,x}(t)$ ebenfalls subharmonisch. Da offensichtlich gilt: $\lim_{x \to \infty} \hat{P}_{1\,x}(t) = p(a_1^{(0)} \cdot t + b_1^{(0)}, \ldots, a_n^{(0)} \cdot t + b_n^{(0)})$, ist somit Satz 1 bewiesen.

Um den im folgenden Abschnitt einzuführenden Begriff der plurisubharmonischen Funktion in einem beliebigen komplexen Raum zu motivieren, beweisen wir noch:

Satz 2. Ist p irgendeine in einem Gebiete G des C^n plurisubharmonische Funktion, und ist τ irgendeine holomorphe Abbildung eines Gebietes $W \subset C$ in G, so ist $p \circ \tau$ stets eine subharmonische Funktion in W.

Wir führen den Beweis zunächst für mindestens zweimal stetig differenzierbare plurisubharmonische Funktionen p. Für diese ist nach 2.a) die Form $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 p}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \, d\bar{z}_j$ positiv semi-definit. Wird τ durch die in W holomorphen Funktionen

$$z_\nu = f_\nu(z), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \ z \in W$$

beschrieben, so ist $p \circ \tau$ in W ebenfalls mindestens zweimal stetig differenzierbar, und $\frac{d^2 p \circ \tau(z)}{dz\, d\bar{z}} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 p}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \frac{df_i}{dz} \frac{\overline{df_j}}{dz}$ ist in W nicht negativ. Das besagt aber, daß $p \circ \tau$ subharmonisch in W ist.

Es sei nun p irgendeine in G plurisubharmonische Funktion. Es sei G_ν eine Folge von relativ-kompakt in G liegenden Gebieten, die G ausschöpft. Wir können nach 2.b) in jedem G_ν eine absteigende, gegen p konvergierende Folge von in G_ν zweimal stetig differenzierbaren, plurisubharmonischen Funktionen $p_\varkappa$ finden. Aus dem bereits Bewiesenen folgt, daß $p_\varkappa \circ \tau$ stets subharmonisch in $W_\nu = \tau^{-1}(\tau(W) \cap G_\nu)$ ist; dabei ist W_ν eine offene Menge in W. Nach 2.c) ist daher $p \circ \tau$ selbst subharmonisch in W_ν. Da die W_ν die Menge W ausschöpfen, folgt unmittelbar aus der Definition der subharmonischen Funktionen, daß $p \circ \tau$ auch in W selbst subharmonisch ist. — Satz 2 ist bewiesen.

4. Wir führen nun den Begriff der plurisubharmonischen Funktion in beliebigen komplexen Räumen ein. Ausgehend vom Begriff der endlichblättrigen analytisch-verzweigten Überlagerung denken wir uns den Begriff des komplexen Raumes wie in [4], [6] definiert. Ebenso seien analytische Mengen sowie holomorphe Abbildungen von komplexen Räumen ineinander wie in [4], [6] erklärt.

Def. 1. Eine Funktion $p(x)$ in einem komplexen Raum X heißt plurisubharmonisch in X, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

α) Die Werte von $p(x)$ sind reelle Zahlen oder $-\infty$.

β) $p(x)$ ist in jedem Punkt $x_0 \in X$ halbstetig nach oben: $\overline{\lim_{x \to x_0}} p(x) \leqq p(x_0)$.

γ) Ist τ irgendeine holomorphe Abbildung eines Gebietes W der Zahlenebene in den Raum X, so ist $p \circ \tau$ eine in W subharmonische Funktion.

Offensichtlich ist im Falle, daß X ein Gebiet G des C^n ist, jede nach Def. 1 plurisubharmonische Funktion in G auch nach Def. 1a plurisubharmonisch in G. Aus Satz 2 folgt sofort, daß auch die Umkehrung gilt:

Die Definitionen 1a und 1 sind für Gebiete im C^n äquivalent.

5. Für plurisubharmonische Funktionen in beliebigen komplexen Räumen gelten mutatis mutandis ebenfalls die in 2. gemachten Aussagen a) bis d). Wir notieren einige weitere Eigenschaften. Nützlich für viele Überlegungen ist:

e) *Eine Funktion p in einem komplexen Raum X ist genau dann plurisubharmonisch in X, wenn sie in jedem Punkte $x \in X$ plurisubharmonisch ist.*

Dabei nennen wir p plurisubharmonisch im Punkte x, wenn es eine Umgebung U von x gibt, so daß p im komplexen Raum U plurisubharmonisch ist.

Weiter gilt, wie für subharmonische Funktionen:

f) *Sind p und q plurisubharmonische Funktionen in einem komplexen Raum X, so ist auch die Summe $p+q$ eine plurisubharmonische Funktion in X.*

Dagegen ist die Differenz $p-q$ im allgemeinen nicht mehr plurisubharmonisch in X. Die Gesamtheit aller in einem komplexen Raum X plurisubharmonischen Funktionen bildet daher bezüglich der Addition eine Halbgruppe; sie sei gegebenenfalls mit $\Pi(X)$ bezeichnet.

Der Begriff der plurisubharmonischen Funktion ist invariant gegenüber holomorphen Abbildungen in folgendem Sinne:

g) *Ist p eine plurisubharmonische Funktion in einem komplexen Raum X und ist $\tau\colon Y \to X$ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes Y in X, so ist $p \circ \tau$ eine plurisubharmonische Funktion in Y.*

Der Abbildung $\tau\colon Y \to X$ entspricht somit in natürlicher Weise ein *Homomorphismus* $\tau^*\colon \Pi(X) \to \Pi(Y)$. Ist τ eine Abbildung auf X, so ist τ^* ein *Isomorphismus in* $\Pi(Y)$. Ist τ außerdem noch umkehrbar, so ist τ^* ein *Isomorphismus auf* $\Pi(Y)$.

Aus dem für subharmonische Funktionen gültigen Maximumprinzip folgt:

h) *Maximumprinzip für plurisubharmonische Funktionen: Nimmt eine in einem (zusammenhängenden) komplexen Raum X plurisubharmonische Funktion ihr Maximum in X an, so ist sie konstant.*

Hieraus erhält man:

i) *Verschärfung von Bedingung β): Ist p eine plurisubharmonische Funktion in einem komplexen Raum X, so gilt in jedem Punkte $x_0 \in X$:* $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}}\, p(x) = p(x_0)$.

In der Tat! Gäbe es einen Punkt $x_0 \in X$, so daß gelten würde: $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}}\, p(x) < p(x_0)$, so gäbe es eine zusammenhängende Umgebung U von x_0, derart, daß die Beschränkung $\hat{p}$ von p auf U ihr Maximum in x_0 annähme. Da $\hat{p}$ in U plurisubharmonisch und wegen $\hat{p}(x_0) > \overline{\lim\limits_{x \to x_0}}\, \hat{p}(x)$ nicht konstant ist, hat man einen Widerspruch zum Maximumprinzip.

6. Wir wollen uns in dieser Arbeit mit Fortsetzungsfragen für plurisubharmonische Funktionen beschäftigen. Wir definieren:

Def. 2. Es sei X ein komplexer Raum; es sei $N \neq X$ eine abgeschlossene Menge in X. Eine in $X - N$ plurisubharmonische Funktion p heißt plurisubharmonisch fortsetzbar in X, wenn es in X eine plurisubharmonische Funktion $\check{p}$ gibt, die in $X - N$ mit p übereinstimmt.

Ist p in X plurisubharmonisch fortsetzbar, so heißen die Punkte von N *hebbare Singularitäten* von p. Die plurisubharmonische Fortsetzung einer plurisubharmonischen Funktion ist im allgemeinen nicht eindeutig.

Zur Formulierung der Hauptresultate benötigen wir den Begriff der dünnen Menge[2]).

Def. 3. Eine abgeschlossene Teilmenge D eines n-dimensionalen komplexen Raumes X heißt dünn von der Ordnung k $(1 \leq k \leq n)$, wenn es zu jedem Punkt $x \in D$ eine Umgebung $U(x)$ und eine in U analytische, höchstens $(n-k)$-dimensionale Menge M gibt, für die gilt: $D \cap U \subset M$.

Hier bedarf der Begriff der Dimension einer analytischen Menge einer Erläuterung. Im Zahlenraum C^n sowie in komplexen Mannigfaltigkeiten sind mehrere Definitionen geläufig und äquivalent [3], [11]. Hinsichtlich der

[2]) Sinngemäßer wäre vielleicht die Bezeichnung analytisch dünne Menge. Der bequemeren Schreibweise halber haben wir das Beiwort „analytisch" unterdrückt.

präzisen Definition dieses Begriffes für komplexe Räume sei auf [6] verwiesen; für die Belange der vorliegenden Arbeit genügt folgende Aussage, die man etwa als Definition auffassen mag:

Eine in einem komplexen Raum X analytische Menge M ist im Punkte $x \in M$ genau dann höchstens s-dimensional, wenn folgendes gilt: Eine Umgebung $U(x) \subset X$ läßt sich durch eine holomorphe Abbildung τ eineindeutig auf eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung (R, Φ, G)[3]) eines Gebietes G des C^n abbilden, derart, daß $\Phi \circ \tau(M \cap U)$ in G in einer analytischen Menge von der Dimension $k \leq s$ enthalten ist. — Es ist leicht einzusehen, daß diese Definition unabhängig von (R, Φ, G) und τ ist.

7. In den nachstehenden Paragraphen beweisen wir die folgenden beiden Hauptsätze über hebbare Singularitäten plurisubharmonischer Funktionen.

Satz 3 (Analogon zum ersten Riemannschen *Satz über hebbare Singularitäten). Es sei D eine dünne Menge der Ordnung 1 in einem komplexen Raum X; es sei p eine in $X - D$ plurisubharmonische Funktion. Zu jedem Punkt $x \in D$ gebe es eine Umgebung U, derart, daß p in $U - U \cap D$ nach oben beschränkt ist. Dann ist p eindeutig zu einer in ganz X plurisubharmonischen Funktion $\breve{p}$ fortsetzbar.*

Satz 4 (Analogon zum zweiten Riemannschen *Satz über hebbare Singularitäten). Ist D eine dünne Menge der Ordnung 2 in einem komplexen Raum X, so ist jede in $X - D$ plurisubharmonische Funktion p eindeutig zu einer in ganz X plurisubharmonischen Funktion $\breve{p}$ fortsetzbar.*

Da die nichtuniformisierbaren Punkte eines komplexen Raumes X eine dünne Menge der Ordnung 2 in X sind (vgl. [6]), ergibt sich aus Satz 4 direkt:

Ist die Funktion p in jedem uniformisierbaren Punkt eines komplexen Raumes X plurisubharmonisch, so existiert genau eine plurisubharmonische Fortsetzung von p in ganz X.

Es sei angemerkt, daß P. Lelong mit völlig anderen Methoden als die in dieser Arbeit benutzten eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes 3 für den Fall, daß X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, bewiesen hat[4]).

Die Sätze 3 und 4 lassen sich besonders elegant formulieren, wenn man ihnen eine algebraische Fassung gibt. Ist $N \neq X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines komplexen Raumes X, so bezeichne i^*: $\Pi(X) \to \Pi(X - N)$ den der Injektion i: $X - N \to X$ in kanonischer Weise zugeordneten Homomorphismus der Halbgruppe $\Pi(X)$ der in X plurisubharmonischen Funktionen in die Halbgruppe $\Pi(X - N)$ der in $X - N$ plurisubharmonischen Funktionen. Mit $\Pi^*(X - N)$ werde diejenige Unterhalbgruppe von $\Pi(X - N)$ bezeichnet,

[3]) Für analytisch-verzweigte Überlagerungen hat sich die Tripelschreibweise (R, Φ, G) als zweckmäßig erwiesen: R bezeichnet den eigentlichen Überlagerungsraum; G das Gebiet im C^n, über dem der Raum R liegt; und Φ die natürliche Abbildung von R auf G. Hinsichtlich der näheren Beschreibung vgl. [4] und [6].

[4]) Die Arbeit von Lelong wird in den Math. Ann. erscheinen. Vgl. auch C. R. Acad. Paris **242**, 55—57 (1956).

deren Elemente in der Umgebung eines jeden Punktes von N nach oben beschränkt sind. Dann gilt:

Satz 3a: Ist D eine dünne Menge der Ordnung 1 in einem komplexen Raum X, so ist der Homomorphismus $i^*: \Pi(X) \to \Pi(X-D)$ ein Isomorphismus von $\Pi(X)$ auf $\Pi^*(X-D)$.

Satz 4 formuliert sich wie folgt:

Satz 4a: Ist D eine dünne Menge der Ordnung 2 in einem komplexen Raum X, so ist der Homomorphismus $i^*: \Pi(X) \to \Pi(X-D)$ ein Isomorphismus von $\Pi(X)$ auf $\Pi(X-D)$.

§ 2. Beweis der Fortsetzungssätze für komplexe Mannigfaltigkeiten

1. Grundlegend für den Beweis der Sätze 3 und 4 ist der folgende Fortsetzungssatz für subharmonische Funktionen, der zugleich den Satz 3 für den Fall der Dimension 1 enthält.

Satz 5. Es sei B ein Bereich der z-Ebene; es sei $z^{(0)}$ irgendein Punkt aus B. In $B-z^{(0)}$ sei eine subharmonische Funktion $s(z)$ gegeben, die in einer Umgebung von $z^{(0)}$ nach oben beschränkt ist. Dann ist

$$\breve{s}(z) = \begin{cases} s(z) & \text{für} \quad z \neq z^{(0)}, \\ \overline{\lim\limits_{z \to z^{(0)}}}\, s(z) & \text{für} \quad z = z^{(0)}, \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte subharmonische Fortsetzung von $s(z)$ in B[5]).

Beweis. Die Funktion $\breve{s}(z)$ ist wegen der Beschränktheit von $s(z)$ nach oben in der Umgebung von $z^{(0)}$ sinnvoll definiert: es gilt stets $\breve{s}(z) < +\infty$. Da $\breve{s}(z)$ nach Definition halbstetig nach oben ist in jedem Punkt $z \in B$, ist also nur noch zu zeigen, daß auch die Bedingung γ') erfüllt ist.

Es werde angenommen, daß dies nicht der Fall ist. Es gibt dann ein Teilgebiet W von B und eine in W harmonische Funktion h, derart, daß die Funktion $\breve{s}+h$ in W nicht konstant ist und ihr Maximum m in einem inneren Punkt $\tilde{z}^{(0)} \in W$ annimmt. Offenbar enthält W dann den Punkt $z^{(0)}$, und es gilt $\tilde{z}^{(0)} = z^{(0)}$; weiter wird der Wert m von $\breve{s}+h$ in keinem von $z^{(0)}$ verschiedenen Punkt aus W angenommen. Wir legen nun um $z^{(0)}$ einen Kreis $K_0: \{|z-z^{(0)}| \leq d_0\}$, der in W enthalten ist. Für jeden Punkt $z \in \{|z-z^{(0)}| = d_0\}$ gilt dann: $\breve{s}(z)+h(z) < m$. Da $\breve{s}+h$ halbstetig nach oben in W ist, können wir ein $\varepsilon > 0$ so finden, daß für jeden Punkt von $|z-z^{(0)}| = d_0$ sogar gilt: $\breve{s}(z)+h(z) < m-\varepsilon$.

Wir bilden jetzt im Kreisring $K_d: \{d < |z-z^{(0)}| < d_0\}$, $0 < d < d_0$, die harmonische Funktion

$$h_d(z) = \frac{\varepsilon}{\ln \dfrac{d}{d_0}} \cdot \ln \left\{ \left(\frac{d}{d_0} \right)^{\frac{m}{\varepsilon}} \cdot \frac{|z-z^{(0)}|}{d} \right\}.$$

---

[5]) Dieser Satz wurde im wesentlichen bereits von BRELOT [1] im Jahre 1934 bewiesen. Der hier wiedergegebene Beweis stimmt nicht mit dem von BRELOT mitgeteilten überein.

Offensichtlich ist:

$$h_d(z) = \begin{cases} m & \text{für } z \in \{|z - z^{(0)}| = d\} \\ m - \varepsilon & \text{für } z \in \{|z - z^{(0)}| = d_0\}. \end{cases}$$

Daher gilt für jeden Punkt $z \in K_d$: $\breve{s}(z) + h(z) \leqq h_d(z)$.

Wie man leicht nachrechnet, konvergiert die Folge $h_d(z)$ für $d \to 0$ im Innern von $K_0 - z^{(0)}$ gleichmäßig gegen $m - \varepsilon$. Es gilt also in $K_0 - z^{(0)}$:

$$\breve{s}(z) + h(z) \leqq m - \varepsilon.$$

Das ist jedoch nicht mit der Gleichung $\breve{s}(z^{(0)}) + h(z^{(0)}) = m$ verträglich. Mithin ist $\breve{s}(z)$ eine in B subharmonische Funktion. Wegen der verschärften Bedingung β) ist klar, daß $\breve{s}(z)$ die einzige subharmonische Fortsetzung von $s(z)$ in B ist.

2. Der Beweis des Satzes 3 für komplexe Räume beliebiger Dimension bereitet größere Schwierigkeiten, die durch die Existenz nichtuniformisierbarer Punkte in solchen Räumen bedingt sind. Wir schließen daher zunächst diesen Fall aus und beweisen den folgenden Spezialfall von Satz 3:

Satz 6. Es sei D eine dünne Menge der Ordnung 1 in einer komplexen Mannigfaltigkeit X und $p(x)$ eine in $X - D$ plurisubharmonische Funktion, die in einer Umgebung eines jeden Punktes von D nach oben beschränkt ist. Dann ist

$$\breve{p}(x') = \begin{cases} p(x') & \text{für } x' \notin D, \\ \overline{\lim}_{x \to x',\ x \in X - D} p(x) & \text{für } x' \in D, \end{cases}$$

die eindeutig bestimmte plurisubharmonische Fortsetzung von $p(x)$ in X.

Anmerkung. Die Redeweise, p ist in einer Umgebung eines jeden Punktes $x \in D$ nach oben beschränkt, soll heißen, daß es eine Umgebung U von x gibt, so daß p in $U - U \cap D$ nach oben beschränkt ist.

Beweis Die Funktion $\breve{p}(x)$ ist wegen der Beschränktheit von $p(x)$ nach oben in der Umgebung eines jeden Punktes von D in ganz X sinnvoll definiert; es gilt stets: $\breve{p}(x) < +\infty$. Weiter ist $\breve{p}(x)$ in jedem Punkt $x \in X$ halbstetig nach oben. Gäbe es nämlich einen Punkt $x^* \in D$ und eine gegen x^* konvergierende Folge $x_\nu \in X$ mit $\overline{\lim}_{x_\nu \to x^*} \breve{p}(x_\nu) > \breve{p}(x^*)$, so gäbe es, wie aus der Definition von $\breve{p}(x)$ unmittelbar folgt, auch eine Folge $\tilde{x}_\nu \in X - D$ mit derselben Eigenschaft; das widerspricht jedoch der Definition von $\breve{p}$ in x^*.

Es bleibt noch die Bedingung γ) zu verifizieren. Da alle Punkte von X uniformisierbar sind, kann man zu jedem Punkt $x \in D$ eine Umgebung U finden, die sich eineindeutig und holomorph auf ein Gebiet G des C^n abbilden läßt. Bezeichnet τ eine solche Abbildung, so ist nach § 1.5.g) die Funktion $\breve{p}(x)$ sicher dann plurisubharmonisch in X, wenn $\breve{p} \circ \tau^{-1} = (p \breve{\circ} \tau^{-1})$ plurisubharmonisch in G ist. Wir brauchen also Satz 6 nur für Gebiete G des C^n zu beweisen. Da wir wegen § 1.5.e) das Gebiet G beliebig klein wählen dürfen,

können wir noch annehmen, daß D im Nullstellengebilde F einer in G holomorphen, nicht identisch verschwindenden Funktion f enthalten ist. Es werde nun Satz 6 für diesen Fall bewiesen.

Nach Satz 1 genügt es, im Raum der eindimensionalen analytischen Ebenen durch G eine dichte Menge M anzugeben, derart, daß die Beschränkung von $\breve{p}$ auf jede Ebene $E \in M$ subharmonisch ist. Wir wählen für M die offensichtlich dichte Menge aller derjenigen eindimensionalen analytischen Ebenen durch G, die die in G analytische Menge $F: \{f = 0\}$ punkthaft schneiden.

Ist nun $\widetilde{E}$ irgendeine Ebene aus M und $\mathfrak{z}_0$ ein isolierter Schnittpunkt von $\widetilde{E}$ mit D (man beachte: $D \subset F$), so ist die Beschränkung von $\breve{p}$ auf $\widetilde{E}$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ auf Grund von Satz 5 sicher dann subharmonisch, wenn die Gleichung gilt:

$$\breve{p}(\mathfrak{z}_0) = \overline{\lim_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z} \in \widetilde{E} - \mathfrak{z}_0}} p(\mathfrak{z}).$$

Sicher gilt $\overline{\lim}_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z} \in \widetilde{E} - \mathfrak{z}_0} p(\mathfrak{z}) \leq \breve{p}(\mathfrak{z}_0)$; wir nehmen zur Erzielung eines Widerspruches an, es würde gelten: $\overline{\lim}_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z} \in \widetilde{E} - \mathfrak{z}_0} p(\mathfrak{z}) < m < \breve{p}(\mathfrak{z}_0)$. Es sei dann $\mathfrak{z}_\nu \in G - D$ eine gegen $\mathfrak{z}_0$ konvergierende Punktfolge mit $\lim_{\nu \to \infty} p(\mathfrak{z}_\nu) = \breve{p}(\mathfrak{z}_0)$, welche es laut Definition von $\breve{p}(\mathfrak{z}_0)$ gibt. Mit E_ν werde diejenige durch $\mathfrak{z}_\nu$ laufende eindimensionale analytische Ebene bezeichnet, die parallel zu $\widetilde{E}$ ist. Die Ebenen E_ν schneiden die Menge D bei hinreichend groß gewähltem Index ν ebenfalls punkthaft.

Bezeichnen wir mit $p_\nu(\mathfrak{z})$ die Beschränkung von $p(\mathfrak{z})$ auf $E_\nu - E_\nu \cap D$, so läßt sich also jede Funktion $p_\nu(\mathfrak{z})$ bei genügend groß gewähltem ν auf Grund von Satz 5 zu einer in ganz E_ν subharmonischen Funktion $\breve{p}_\nu(\mathfrak{z})$ fortsetzen [es wird an dieser Stelle nicht behauptet, daß $\breve{p}_\nu(\mathfrak{z})$ mit der Beschränkung von $\breve{p}(\mathfrak{z})$ auf E_ν übereinstimmt!]. Sei nun $\widetilde{K}$ ein Kreis auf $\widetilde{E}$ um $\mathfrak{z}_0$; seien K_ν Kreise von gleichem Radius r um $\mathfrak{z}_\nu$ auf E_ν. Für hinreichend kleinen Radius r und genügend großes ν haben die Ränder $\partial \widetilde{K}$, ∂K_ν der Kreise $\widetilde{K}$, K_ν mit der Menge D keinen Punkt gemeinsam; man kann erreichen, daß gilt:

$$\breve{p}_\nu(\mathfrak{z}) = p(\mathfrak{z}) < m \quad \text{für} \quad \mathfrak{z} \in \partial K_\nu,\ \nu > \nu_0.$$

Bei genügend kleinem r ist nämlich wegen der Annahme $\overline{\lim}_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z} \in \widetilde{E} - \mathfrak{z}_0} p(\mathfrak{z}) < m$ auch $p(\mathfrak{z}) < m$ für $\mathfrak{z} \in \partial \widetilde{K}$. Weil ferner $p(\mathfrak{z})$ halbstetig nach oben ist, gilt das noch in einer ganzen Umgebung von ∂K, also auch auf ∂K_ν, $\nu > \nu_0$. Für hinreichend großes ν ist aber auch

$$\breve{p}_\nu(\mathfrak{z}_\nu) > m.$$

Da $\mathfrak{z}_\nu \in K_\nu$, würde also die in K_ν subharmonische Funktion $\breve{p}_\nu$ ihr Maximum in K_ν annehmen und nicht konstant sein. Das widerspricht jedoch dem Maximumprinzip. Folglich gilt doch: $\overline{\lim}_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z} \in \widetilde{E} - \mathfrak{z}_0} p(\mathfrak{z}) = \breve{p}(\mathfrak{z}_0)$, d.h. $\breve{p}(\mathfrak{z})$ ist eine plurisubharmonische Fortsetzung von $p(\mathfrak{z})$ in X.

Es bleibt zu zeigen, daß $\breve{p}(\mathfrak{z})$ die einzige plurisubharmonische Fortsetzung von $p(\mathfrak{z})$ in X ist. Zu dem Zwecke sei $\breve{p}'(\mathfrak{z})$ irgendeine weitere plurisubharmonische Fortsetzung von $p(\mathfrak{z})$ in X. Dann gilt $\breve{p}'(\mathfrak{z}) = \breve{p}(\mathfrak{z}) = p(\mathfrak{z})$ für jeden Punkt $\mathfrak{z} \in X - D$. Ist nun $\mathfrak{z}_0 \subset D$ irgendein Punkt, so sei E eine eindimensionale RIEMANNsche Fläche durch $\mathfrak{z}_0$, die D in der Nähe von $\mathfrak{z}_0$ nur in $\mathfrak{z}_0$ schneidet. Da die Beschränkungen von $\breve{p}'$ und $\breve{p}$ auf E subharmonisch sind, folgt aus der verschärften Bedingung β') in beiden Fällen:

$$\overline{\lim_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z} \in E - \mathfrak{z}_0}} p(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \breve{p}(\mathfrak{z}_0), \\ \breve{p}'(\mathfrak{z}_0). \end{cases}$$

Daher stimmt $\breve{p}'$ in jedem Punkt von X mit $\breve{p}$ überein. — Satz 6 ist bewiesen.

§ 3. Beweis der Fortsetzungssätze für beliebige komplexe Räume

1. Um den Allgemeinfall des Satzes 3 zu beweisen, sind umfangreiche Vorbereitungen erforderlich. Wir benötigen zunächst einen Fortsetzungssatz für endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerungen (zum Beweise vgl. [6]):

Fortsetzungssatz. Ist A eine höchstens $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in einem Gebiete G des C^n, so ist jede endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung $(R, \Phi, G - A)$ von $G - A$ eindeutig zu einer endlich-blättrigen, analytisch-verzweigten Überlagerung $(\breve{R}, \breve{\Phi}, G)$ von G fortsetzbar.

Weiter werden wir einen grundlegenden Satz von F. HIRZEBRUCH aus der Theorie der Modifikationen entscheidend verwenden (zur Theorie der Modifikationen vgl. [4]).

Ein komplexer Raum $'X$ heißt eine (eigentliche) Modifikation eines komplexen Raumes X, wenn es eine eigentliche holomorphe Abbildung τ von $'X$ auf X und dünne Mengen $N \subset X$, $'N \subset {}'X$ der Ordnung 1 gibt, so daß τ den Raum $'X - {}'N$ umkehrbar eindeutig auf $X - N$ abbildet.

F. HIRZEBRUCH hat bewiesen [7]:

Satz. Zu jedem zweidimensionalen komplexen Raum X gibt es eine eigentliche Modifikation $'X$, derart, daß $'X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $N \subset X$ die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von X ist.

Bekanntlich liegen bei zweidimensionalen komplexen Räumen die nichtuniformisierbaren Punkte isoliert. Offensichtlich ist die Menge $'N_x \subset {}'X$, die vermöge der Modifikationsabbildung τ auf einen nichtuniformisierbaren Punkt $x \in X$ abgebildet wird, eine analytische Menge in $'X$. Wir zeigen nun für $n = 2$:

Hilfssatz 1. Die Menge $'N_x$ ist stets zusammenhängend.

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so zerfiele die Menge $'N_x$ für einen gewissen nichtuniformisierbaren Punkt $x \in X$ in zwei in $'X$ analytische Mengen $'N_1$ und $'N_2$, die punktfremd sind. Da $'N_1$ und $'N_2$ abgeschlossen sind, gibt es auch punktfremde zusammenhängende Umgebungen $'U_1('N_1)$ und $'U_2('N_2)$,

die keinen weiteren Punkt von $'N$ enthalten. Es ist nun

$$\tau\{('U_1('N_1) - 'N_1) \cup ('U_2('N_2) - 'N_2)\} \cup x$$

eine zusammenhängende Umgebung U des Punktes x, wie man sofort einsieht, wenn man beachtet, daß τ eine eigentliche Abbildung ist. Nun ist auch $U - x$ zusammenhängend. Andererseits ist aber $U - x$ die Vereinigung der beiden punktfremden offenen Mengen $\tau('U_1('N_1) - 'N_1)$ und $\tau('U_2('N_2) - 'N_2)$. Widerspruch! Der Hilfssatz ist bewiesen.

2. Es sei nun $\mathfrak{R} = (R, \Phi, Z^2)$ eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung eines zweidimensionalen Polyzylinders Z^2: $\{|z_1 - z_1^{(0)}| < d, |z_2 - z_2^{(0)}| < d\}$; über dem Punkt $\mathfrak{z}_0 = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \in Z^2$ liege nur ein Punkt $r_0 \in R$. Die Verzweigungspunkte von $\mathfrak{R}$ seien sämtlich über der in Z^2 analytischen eindimensionalen Menge V gelegen; die Ebene E: $\{z_2 = z_2^{(0)}\}$ schneide V nur im Punkte $\mathfrak{z}_0$. Wir betrachten die analytisch-verzweigte Überlagerung $(\Phi^{-1}(E \cap Z^2 - \mathfrak{z}_0), \Phi, E \cap Z^2 - \mathfrak{z}_0)$. Dieselbe zerfällt in endlich viele zusammenhängende Komponenten $\tilde{\mathfrak{R}}_\varkappa = (\tilde{R}_\varkappa, \tilde{\Phi}_\varkappa, E \cap Z^2 - \mathfrak{z}_0)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; der Punkt r_0 ist Häufungspunkt jeder Menge $\tilde{R}_\varkappa$. Wir behaupten:

Hilfssatz 2. Ist $p(r)$ eine auf $R - r_0$ plurisubharmonische Funktion, die in der Umgebung des Punktes r_0 nach oben beschränkt ist, so gilt:

$$\overline{\lim_{r \to r_0,\ r \in \tilde{R}_\varkappa}} p(r) = \overline{\lim_{r \to r_0,\ r \in R - r_0}} p(r) = m \quad \text{für jedes} \quad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Beweis. Sicher existieren sämtliche angeschriebenen limites superiores. Um zu zeigen, daß sie alle übereinstimmen, modifizieren wir nach F. HIRZEBRUCH den zweidimensionalen komplexen Raum R zu einer komplexen Mannigfaltigkeit $'R$. Die Funktion $'p = p \circ \tau$, wo τ die zugehörige Modifikationsabbildung bezeichnet, ist nun in $'R - 'N_{r_0}$, wo $'N_{r_0} = \tau^{-1}(r_0)$, plurisubharmonisch und bleibt in der Umgebung von $'N_{r_0}$ nach oben beschränkt, da p in der Umgebung von r_0 nach oben beschränkt ist. Da $'N_{r_0}$ insbesondere eine dünne Menge der Ordnung 1 in der komplexen Mannigfaltigkeit $'R$ ist, so läßt sich $'p$ nach Satz 6 zu einer in ganz $'R$ plurisubharmonischen Funktion $'\breve{p}$ fortsetzen. Die kompakte Menge $'N_{r_0}$ zerfällt in $'R$ in endlich viele algebraische RIEMANNsche Flächen $'A_1, \ldots, 'A_l$. Aus dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen folgt, daß $'\breve{p}$ auf allen kompakten RIEMANNschen Flächen $'A_1, \ldots, 'A_l$ konstant ist. Nach Hilfssatz 1 ist $'N_{r_0} = \bigcup_{\lambda=1}^{l} 'A_\lambda$ zusammenhängend; daher ist der Wert von $'\breve{p}$ auf allen $'A_\lambda$ derselbe und mithin $'\breve{p}$ auf $'N_{r_0}$ selbst konstant. Die in $'R - 'N_{r_0}$ analytische Menge $\tau^{-1}(\tilde{R}_\varkappa)$ ist für jedes $\varkappa$ zu einer in $'R$ irreduziblen RIEMANNschen Fläche $'\tilde{R}_\varkappa$ fortsetzbar[6]; dieselbe hat dann mit $'N_{r_0}$ genau einen Punkt $'r_\varkappa$ gemeinsam, der eventuell der einzige nicht gewöhnliche Punkt von $'\tilde{R}_\varkappa$ ist. Da die Beschränkung von

[6]) Die Fortsetzbarkeit jeder Menge $\tau^{-1}(\tilde{R}_\varkappa)$ zu einer in $'R$ irreduziblen RIEMANNschen Fläche folgert man am einfachsten aus einem allgemeinen Fortsetzungssatz von analytischen Mengen bei eigentlichen Modifikationen, vgl. [4].

${}'\overset{\cup}{p}$ auf ${}'\widetilde{R}_\varkappa$ eine subharmonische Funktion ist, folgt aus § 1.5.i), daß gilt:

$$\overline{\lim_{r\to r_0,\ r\in\widetilde{R}_\varkappa}} p(r) = \lim_{{}'r\to{}'r_\varkappa,\ {}'r\in{}'\widetilde{R}_\varkappa-{}'r_\varkappa} p\circ\tau({}'r) = {}'\overset{\cup}{p}({}'r_\varkappa),\quad \varkappa=1,\dots,k.$$

Da ${}'r_\varkappa\in{}'N_{r_0}$ und ${}'\overset{\cup}{p}$ auf ${}'N_{r_0}$ konstant ist, folgt:

$${}'\overset{\cup}{p}({}'r_\varkappa) = \overline{\lim_{{}'r\to{}'N_{r_0},\ {}'r\in{}'R-{}'N_{r_0}}} {}'p({}'r) = m.$$

Der hier rechts stehende Ausdruck stimmt aber wegen ${}'p = p\circ\tau$ mit $\overline{\lim_{r\to r_0,\ r\in R-r_0}} p(r)$ überein. Somit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

3. In diesem Abschnitt betrachten wir endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerungen $\mathfrak{R}=(R,\Phi,Z)$ eines n-dimensionalen Polyzylinders $Z\colon \{|z_1-z_1^{(0)}|<d,\dots,|z_n-z_n^{(0)}|<d\}$, $n\geq 2$. Analog wie in Abschnitt 2 werde angenommen, daß über $\mathfrak{z}_0=(z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)})$ nur ein Punkt $r_0\in R$ liegt; weiter sei V eine in Z analytische, rein $(n-1)$-dimensionale Menge, über der sämtliche Verzweigungspunkte von $\mathfrak{R}$ liegen. Wir setzen voraus, daß V enthalten ist im Polyzylinder $Z'\colon \left\{|z_1-z_1^{(0)}|<\frac{d}{2}\right\}\times\hat{Z}$, wobei wir setzen:

$$\hat{Z}\colon \{|z_2-z_2^{(0)}|<d,\dots,|z_n-z_n^{(0)}|<d\}.$$

Alsdann ist V das Nullstellengebilde eines Pseudopolynoms

$$\omega = z_1^s + A_1(z_2,\dots,z_n)\,z_1^{s-1}+\cdots+A_s(z_2,\dots,z_n)$$

mit in $\hat{Z}$ holomorphen Koeffizienten $A_\sigma(z_2,\dots,z_n)$; man kann annehmen, daß ω keine mehrfachen Faktoren besitzt. Es bezeichne $\hat{V}$ die Diskriminantenmenge von ω im $(n-1)$-dimensionalen Polyzylinder $\hat{Z}$; $\hat{V}$ ist eine analytische, rein $(n-2)$-dimensionale oder leere Menge in $\hat{Z}$.

Wir behaupten:

Hilfssatz 3. Ist $E^1\colon \{z_2=a_2,\dots,z_n=a_n\}$ *irgendeine eindimensionale analytische Ebene in* Z *mit* $(a_2,\dots,a_n)\in\hat{Z}-\hat{V}$, *so ist* $(\Phi^{-1}(E^1\cap Z-V),\Phi,E^1\cap Z-V)$ *eine zusammenhängende unverzweigte Überlagerung von* $E^1\cap Z-V$.

Beweis. Sicher ist $E^1\cap Z-V$ und damit auch $\widetilde{R}=\Phi^{-1}(E^1\cap Z-V)$ nicht leer. Da $\widetilde{R}$ keine Punkte über V besitzt, ist Φ in $\widetilde{R}$ eine lokal-topologische Abbildung; daher ist $(\widetilde{R},\Phi,E^1\cap Z-V)$ eine unverzweigte Überlagerung von $E^1\cap Z-V$. Wäre nun der Raum $\widetilde{R}$ nicht zusammenhängend, so zerfiele er in mindestens zwei zusammenhängende Komponenten; seien $\widetilde{R}_0$ und $\widetilde{R}_1$ solche. Man kann eine Kurve $\{\varphi(t),\ 0\leq t\leq 1\}$ in R finden, die einen Punkt aus $\widetilde{R}_0$ mit einem Punkt aus $\widetilde{R}_1$ verbindet, so daß folgendes gilt:

a) $\{\varphi(t),\ 0\leq t\leq 1\}$ verläuft in $R-\Phi^{-1}(V)$.

b) Bezeichnet $\{z_1(t),\dots,z_n(t),\ 0\leq t\leq 1\}$ die Kurve $\{\Phi\circ\varphi(t),\ 0\leq t\leq 1\}$, so verläuft $\{\hat{\varphi}(t),\ 0\leq t\leq 1\}=\{z_2(t),\dots,z_n(t),\ 0\leq t\leq 1\}$ in $\hat{Z}-\hat{V}$.

Wir betrachten nun die Schar $\{E_t^1\}$ der eindimensionalen analytischen Ebenen $E_t^1\colon \{z_2=z_2(t),\dots,z_n=z_n(t)\}$, und bezeichnen mit T den topologischen

Raum der Paare $(\mathfrak{z}, t)$, wo $\mathfrak{z} \in E_t^1 \cap Z - V$ und $0 \leq t \leq 1$. Wir behaupten: *T ist homöomorph dem kartesischen Produkt eines k-fach punktierten Kreises mit dem Einheitsintervall.*

Da laut Voraussetzung die Kurve $\{\hat{\varphi}(t)\}$ keinen Punkt mit der Diskriminantenmenge $\hat{V}$ von V gemeinsam hat, schneidet jede Ebene E_t^1 die Menge V, die sich als eine Überlagerung von $\hat{Z}$ auffassen läßt, stets außerhalb der Verzweigungspunkte von V über $\hat{Z}$. Es gibt folglich endlich viele stetige Funktionen $s_1(t), \ldots, s_k(t)$, derart, daß $s_\varkappa(t) \neq s_\lambda(t)$ für $\varkappa \neq \lambda$ und $\bigcup_{\varkappa}^{k}{}_{1} s_\varkappa(t) = E_t^1 \cap V$. Daher besteht T aus allen Paaren $(\mathfrak{z}, t)$ mit $\mathfrak{z} \in E_t^1 \cap Z$, $\mathfrak{z} \neq s_\varkappa(t)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, $0 \leq t \leq 1$. Daraus ergibt sich aber direkt die Behauptung.

Neben dem Raum T betrachten wir weiter den Raum R^* der Paare (r, t), wo $r \in \Phi^{-1}(E_t^1 \cap Z - V)$ und $0 \leq t \leq 1$. Setzt man $\Phi^*\big((r, t)\big) = \big(\Phi(r), t\big)$, so ist offenbar (R^*, Φ^*, T) eine endlich-blättrige unbegrenzte Überlagerung von T im topologischen Sinne. Dieselbe ist unverzweigt, da Φ^* überall lokal-topologisch ist. Es sei R_0^* diejenige zusammenhängende Komponente von R^*, die die Kurve $\{\varphi^*(t), 0 \leq t \leq 1\} = \big\{\big(\varphi(t), t\big);\ 0 \leq t \leq 1\big\}$ enthält. Ferner werde gesetzt: $\tilde{R}_t^* = R_0^* \cap \Phi^{*-1}\big((E_t^1 \cap Z - V, t)\big)$; wir behaupten, daß $\tilde{R}_t^*$ stets zusammenhängend ist. Da nämlich T homöomorph dem kartesischen Produkt eines k-fach punktierten Kreises mit dem Einheitsintervall ist, läßt sich in T jede geschlossene Kurve stetig in eine Kurve deformieren, die in einer der Ebenen $\Big(E_t^1 - \bigcup_{\varkappa=1}^{k} s_\varkappa(t), t\Big)$ liegt; dabei darf t zwischen 0 und 1 beliebig gewählt werden.

Aus dieser Eigenschaft von T ergibt sich aber sofort der Zusammenhang jeder Menge $\tilde{R}_t^*$, wenn man beachtet, daß (R_0^*, Φ^*, T) eine zusammenhängende, unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung von T ist; denn man überlegt sofort, daß allgemein gilt:

Ist (E, Ψ, F) eine unverzweigte, unbegrenzte, zusammenhängende Überlagerung eines zusammenhängenden, lokal-zusammenhängenden topologischen Raumes F, und $F' \subset F$ eine zusammenhängende und lokal-zusammenhängende Menge in F, derart, daß jede in F verlaufende, geschlossene Kurve stetig deformierbar ist in eine geschlossene Kurve, die in F' verläuft, so ist $\big(\Psi^{-1}(F'), \Psi, F'\big)$ zusammenhängend.

Der Raum $\tilde{R}_0^*$ enthält den Anfangspunkt und der Raum $\tilde{R}_1^*$ den Endpunkt der Kurve $\{\varphi^*(t)\}$. Bezeichnen wir mit π: $(r, t) \to r$ die natürliche, stetige Abbildung von R^* in R, so wird also mindestens ein Punkt aus $\tilde{R}_0^*$ vermöge π in $\tilde{R}_0$ und mindestens ein Punkt von $\tilde{R}_1^*$ in $\tilde{R}_1$ abgebildet. Da aber $\tilde{R}_0^*$ und $\tilde{R}_1^*$ nach dem Vorstehenden zusammenhängend sind und durch π beide in R abgebildet werden, so folgt, daß $\tilde{R}_0^*$ durch π ganz in $\tilde{R}_0$ und $\tilde{R}_1^*$ durch π ganz in $\tilde{R}_1$ abgebildet wird.

Wir betrachten nun die Überlagerung $\big(\Phi^{-1}(Z - \overline{Z}'), \Phi, Z - \overline{Z}'\big)$ (der Polyzylinder Z' war definiert durch $\Big\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \frac{d}{2}\Big\} \times \hat{Z}\Big)$; dieselbe ist unverzweigt

und unbegrenzt über $Z-\overline{Z}'$ und zerfällt in endlich viele zusammenhängende Komponenten $(B_\lambda, \Phi, Z-\overline{Z}')$, $\lambda=0,1,\ldots,l$. Da sich überdies jede in $Z-\overline{Z}'$ verlaufende geschlossene Kurve stetig deformieren läßt in eine geschlossene Kurve, die in einer beliebig vorgegebenen, $Z-\overline{Z}'$ schneidenden eindimensionalen analytischen Ebene liegt, folgt analog wie oben, daß das Φ-Urbild einer jeden in $Z-\overline{Z}'$ eindimensionalen analytischen Ebene jeweils eine zusammenhängende Menge in B_λ ist. Daher können $\tilde{R}_0\cap\Phi^{-1}(Z-\overline{Z}')$ und $\tilde{R}_1\cap\Phi^{-1}(Z-\overline{Z}')$ nicht beide Punkte in derselben Komponente B_λ besitzen; die Numerierung der B_λ kann folglich so gewählt werden, daß $\tilde{R}_0\cap\Phi^{-1}(Z-\overline{Z}')$ in der Menge $C=\bigcup_{\lambda=0}^{l_0} B_\lambda$ $(l_0<l)$ enthalten und $\tilde{R}_1\cap C$ leer ist.

Wir betrachten nun denjenigen Teilraum T^* von T, der aus genau den Paaren (ζ, t) besteht, wo $\zeta\in E_t^1\cap(Z-\overline{Z}')$, $0\leq t\leq 1$. Die Überlagerung $(\Phi^{*-1}(T^*), \Phi^*, T^*)$ zerfällt in endlich viele Komponenten (B_μ^*, Φ^*, T^*), $\mu=0,\ldots,m$; es sei die Numerierung so gewählt, daß gilt: $B_0^*<R_0^*$. Der Raum B_0^* enthält sowohl Punkte $(r,0)$ als auch Punkte $(r,1)$. Jeder Punkt $(r,0)$ wird nun, da er wegen $B_0^*\quad R_0^*$ in $\tilde{R}_0^*$ liegt, vermöge π in $\tilde{R}_0\cap\Phi^{-1}(Z-\overline{Z}')$ und also in C abgebildet. Dann wird aber, da B_0^* zusammenhängend ist, sogar ganz B_0^* in C abgebildet. Andererseits wird aber jeder Punkt $(r,1)\in B_0^*$, da er in $\tilde{R}_1^*$ liegt, durch π in $\tilde{R}_1$ abgebildet. Da $\tilde{R}_1\cap C$ leer ist, hat sich somit ein Widerspruch ergeben. Die Annahme, daß der Raum $\tilde{R}$ nicht zusammenhängend ist, war also falsch: Hilfssatz 3 ist bewiesen.

Eine einfache Folgerung aus Hilfssatz 3 ist

Hilfssatz 4. Es sei $\hat{E}$ eine eindimensionale analytische Ebene des $(z_2,\ldots,z_n)$-Raumes durch $(z_2^{(0)},\ldots,z_n^{(0)})\in\hat{Z}$, die die Diskriminantenmenge $\hat{V}$ von V höchstens in $(z_2^{(0)},\ldots,z_n^{(0)})$ schneidet. Mit E^2 werde die zweidimensionale analytische Ebene $\{\zeta|,(z_2,\ldots,z_n)\in\hat{E}\}$ bezeichnet. Dann ist $(\Phi^{-1}(E^2\cap Z-V), \Phi, E^2\cap Z-V)$ eine zusammenhängende analytisch-verzweigte Überlagerung von $E^2\cap Z-V$, die sich zu einer analytisch-verzweigten Überlagerung von $E^2\cap Z$ fortsetzen läßt.

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, daß $(\Phi^{-1}(E^2\cap Z-V), \Phi, E^2\cap Z-V)$ zusammenhängend ist; die Fortsetzbarkeit ergibt sich direkt aus dem Fortsetzungssatz. Der Zusammenhang ist aber ebenfalls klar, denn nach Hilfssatz 3 ist stets $\Phi^{-1}(E_1^*\cap Z-V)$ zusammenhängend, wo E_*^1 irgendeine eindimensionale analytische Ebene ist, die in der Form $\{\zeta|,(z_2,\ldots,z_n)=(z_2^*,\ldots,z_n^*)\in\hat{E}-(z_2^{(0)},\ldots,z_n^{(0)})\}$ gegeben werden kann.

4. Unter Verwendung von Hilfssatz 2 und Hilfssatz 4 beweisen wir nun, indem wir die Terminologie des 3. Abschnittes beibehalten, die folgende Verallgemeinerung von Hilfssatz 2:

Hilfssatz 5. Es sei $p(r)$ eine plurisubharmonische Funktion in einer offenen Menge $R-D>\Phi^{-1}(Z-V)$, die in der Umgebung eines jeden Punktes von $D<\Phi^{-1}(V)$ nach oben beschränkt ist. Es sei $\tilde{E}^1$ die eindimensionale analytische Ebene $\{z_2=z_2^{(0)},\ldots,z_n=z_n^{(0)}\}$. Bezeichnen $\tilde{R}_1,\ldots,\tilde{R}_k$ die endlich vielen

zusammenhängenden Komponenten von $\Phi^{-1}(\tilde{E}^1 - \mathfrak{z}_0)$, $\mathfrak{z}_0 = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$, *so gilt:*

$$\overline{\lim_{r \to r_0,\ r \in \tilde{R}_\varkappa}} p(r) = \overline{\lim_{r \to r_0,\ r \in R - D}} p(r) = m, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß gilt:

$$\overline{\lim_{r \to r_0,\ r \in \tilde{R}_\varkappa}} p(r) = m_0 \qquad \text{für jedes } \varkappa = 1, \ldots, k.$$

Zu dem Zwecke legen wir durch den Punkt $(z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ eine eindimensionale analytische Ebene $\hat{E}^1$ in $\hat{Z}$, die $\hat{V}$ in der Nähe von $(z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ nur in $(z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ schneidet. Weiter denken wir uns zu $\hat{E}^1$ die zweidimensionale analytische Ebene E^2 wie in Hilfssatz 4 gewählt. Dann ist $(\Phi^{-1}(E^2 \cap Z - V), \Phi, E^2 \cap Z - V)$ nach Hilfssatz 4 zu einer *zusammenhängenden* Überlagerung von $E^2 \cap Z$ fortsetzbar. Aus Hilfssatz 2 ergibt sich alsdann unmittelbar die obige Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, daß gilt: $m_0 = m$. Sicher gilt $m_0 \leqq m$. Angenommen, es wäre $m_0 < m_1 < m$. Wir wählen dann einen Kreis

$$K: \{|z_1 - z_1^{(0)}| \leqq \delta, \quad z_2 = z_2^{(0)}, \ldots, z_n = z_n^{(0)}\}, \qquad \delta < d,$$

auf $\hat{E}^1$, der mit V nur den Punkt $\mathfrak{z}_0$ gemeinsam hat, derart, daß in $\Phi^{-1}(K - \mathfrak{z}_0)$ gilt: $p(r) < m_1$; letzteres ist offenbar möglich. Es läßt sich weiter eine Umgebung

$$W': \left\{\frac{\delta}{2} \leqq |z_1 - z_1^{(0)}| \leqq \delta, \quad |z_2 - z_2^{(0)}| < \varepsilon, \ldots, |z_n - z_n^{(0)}| < \varepsilon\right\}$$

finden, die keinen Punkt mit V gemeinsam hat, so daß für $r \in \Phi^{-1}(W')$ gilt: $p(r) < m_1$. Bezeichnen wir mit W die Umgebung

$$\{|z_1 - z_1^{(0)}| < \delta, \quad |z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \varepsilon, \quad \nu = 2, \ldots, n\}$$

des Punktes $\mathfrak{z}_0$ und mit E irgendeine der Ebenen $\{z_2 = a_2, \ldots, z_n = a_n\}$, wo $|a_\nu - z_\nu^{(0)}| < \varepsilon$, $\nu = 2, \ldots, n$, so kann jede der Überlagerungen

$$(\Phi^{-1}(E \cap W - V), \Phi, E \cap W - V)$$

zu einer Überlagerung $(\tilde{R}, \Phi, E \cap W)$ von ganz $E \cap W$ fortgesetzt werden. Da $\tilde{R}$ stets eine RIEMANNsche Fläche ist, die durch eine holomorphe Abbildung τ spurpunkttreu in $\Phi^{-1}(E \cap W)$ abgebildet ist, kann man nach Satz 6 die Funktion p auf $\tilde{R} - \tau^{-1}(D)$ zu einer in ganz $\tilde{R}$ subharmonischen Funktion $\tilde{p}$ fortsetzen. Da wegen des Maximumprinzips die Funktion $\tilde{p}(r)$ im Innern von $\tilde{R}$ nicht größer als auf $\Phi^{-1}(\partial(E \cap W))$ sein kann, so gilt für jeden Punkt $r \in \tilde{R}$: $\tilde{p}(r) < m_1$. Es ist deshalb $p(r) \leqq m_1$ in jedem Punkt von $\Phi^{-1}(W) - D$. Dann gilt aber auch $\overline{\lim_{r \to r_0,\ r \in R - D}} p(r) \leqq m_1 < m$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Hilfssatz 5 ist bewiesen.

5. Ist $a(r)$ irgendeine nach oben halbstetige Funktion auf einer s-blättrigen, analytisch-verzweigten, zusammenhängenden Überlagerung (R, Φ, G), so ordnen wir derselben eine in G nach oben halbstetige Funktion $b(\mathfrak{z})$ zu,

indem wir setzen: $b(\mathfrak{z}) = \sum_{\sigma=1}^{s} a(r_\sigma)$, wo r_σ die Punkte aus $\Phi^{-1}(\mathfrak{z})$ durchläuft. Dabei komme der Punkt r_σ genau t-mal vor, wenn die Überlagerung R in hinreichend kleiner Umgebung von r_σ stets t Blätter hat. *Wir nennen $b(\mathfrak{z})$ die zu $a(r)$ gehörende elementarsymmetrische Funktion* und beweisen:

Hilfssatz 6. Es sei $\breve{p}(r)$ eine in R nach oben halbstetige und in $R-D$, $D \subset \Phi^{-1}(V)$, plurisubharmonische Funktion; für jeden Punkt $r_0 \in D$ gelte: $\overline{\lim}_{r \to r_0,\, r \in R-D} \breve{p}(r) = \breve{p}(r_0)$. Dann ist die zu $\breve{p}(r)$ gehörende elementarsymmetrische Funktion $\breve{q}(\mathfrak{z})$ plurisubharmonisch in G.

Beweis. Sei zunächst R eine Überlagerung eines Gebietes G der eindimensionalen Zahlenebene, also eine RIEMANNsche Fläche. Dann besteht D aus isolierten Punkten; da die Aussage des Hilfssatzes lokaler Natur ist, dürfen wir annehmen, daß G ein Kreis und D über dem Mittelpunkt $z^{(0)}$ dieses Kreises liegt und daß R zusammenhängend und nur über $z^{(0)}$ verzweigt ist. Da R im vorliegenden Falle eine RIEMANNsche Fläche ist, folgt aus Satz 5, daß $\breve{p}$ in ganz R subharmonisch ist. Es seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Decktransformationen von R. Da dieselben holomorphe Abbildungen sind, folgt unter Verwendung der Eigenschaften f) und g) aus § 1, daß auch die Funktion $\breve{q}'(r) = \sum_{\sigma=1}^{s} \breve{p} \circ \lambda_\sigma(r)$ subharmonisch in R ist. Offenbar hat $\breve{q}'(r)$ in allen Punkten von R, die über demselben Grundpunkt $z \in G$ liegen, den gleichen Wert. Da überdies $\breve{q}(z) = \breve{q}'(\Phi^{-1}(z))$, so ist also $\breve{q}(z)$ subharmonisch in G.

Sei nun (R, Φ, G) irgendeine Überlagerung. Da die Summe plurisubharmonischer Funktionen plurisubharmonisch ist, ist zunächst $q(\mathfrak{z}) = \sum_{1}^{s} \breve{p}(r_\sigma)$, $\mathfrak{z} \in G - V$, eine in $G - V$ plurisubharmonische Funktion. Da $q(\mathfrak{z})$ in der Umgebung eines jeden Punktes von V nach oben beschränkt ist, läßt sich $q(\mathfrak{z})$ nach Satz 6 zu einer in ganz G plurisubharmonischen Funktion $\tilde{q}(\mathfrak{z})$ fortsetzen. Wir behaupten: $\tilde{q}(\mathfrak{z}) = \breve{q}(\mathfrak{z})$. Zu dem Zwecke genügt es zu zeigen:

$$(*) \qquad \overline{\lim}_{\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}_0,\, \mathfrak{z} \in G-V} q(\mathfrak{z}) \geq \breve{q}(\mathfrak{z}_0) \quad \text{für jedes } \mathfrak{z}_0 \in V.$$

Sei daher $\mathfrak{z}_0 \in V$ irgendein Punkt. Man kann um $\mathfrak{z}_0$ einen in G enthaltenen Polyzylinder Z legen, der in bezug auf V die im Hilfssatz 3 geforderten Eigenschaften hat (eventuell ist eine lineare Koordinatentransformation auszuführen). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde angenommen, daß über $\mathfrak{z}_0$ nur ein Punkt r_0 von R liegt. Es sei wieder die Ebene $\tilde{E}^1$ wie im Hilfssatz 5 gewählt; es bezeichne $(\tilde{R}, \tilde{\Phi}, \tilde{E}^1 \cap Z)$ die Fortsetzung der Überlagerung $(\Phi^{-1}(\tilde{E}^1 \cap Z - V), \Phi, \tilde{E}^1 \cap Z - V)$. Zerfällt nun der Raum $\tilde{R}$ etwa in k zusammenhängende Komponenten $\tilde{R}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, so setzen wir zunächst die Funktion $\breve{p}$ aus $\Phi^{-1}(\tilde{E}^1 \cap Z - V)$ in jede Komponente $\tilde{R}_\varkappa$ zu einer dort subharmonischen Funktion $\breve{p}_\varkappa$ fort. Unter Verwendung von Hilfssatz 5 folgt: $\breve{p}_\varkappa(r) = \breve{p}(r_0)$ für $r \in \tilde{\Phi}^{-1}(\mathfrak{z}_0)$. Daher gilt auf $\tilde{E}^1 \cap Z$, wenn $\breve{q}_\varkappa$ die zu $\breve{p}_\varkappa$

gehörende elementarsymmetrische Funktion bezeichnet:

$$\breve{q}(\mathfrak{z}) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \breve{q}_\varkappa(\mathfrak{z}).$$

Da nach dem bereits Bewiesenen die Funktionen $\breve{q}_\varkappa(\mathfrak{z})$ sämtlich subharmonisch sind, ist also auch $\breve{q}(\mathfrak{z})$ subharmonisch auf $\widetilde{E}^1 \cap Z$. Es gilt daher:

$$\overline{\lim_{\mathfrak{z}\to\mathfrak{z}_0,\ \mathfrak{z}\in\widetilde{E}^1\cap Z-\mathfrak{z}_0}} q(\mathfrak{z}) = \breve{q}(\mathfrak{z}_0).$$

Dann gilt aber erst recht die Ungleichung (*), w. z. b. w.

6. Wir sind nun in der Lage, Satz 3 für beliebige komplexe Räume X zu beweisen. Da die Aussage des Satzes lokaler Natur ist, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß der komplexe Raum X eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung (R, Φ, G) eines Gebietes G des C^n ist. Sei also D eine dünne Menge der Ordnung 1 in R und p eine in $R - D$ plurisubharmonische Funktion, die in der Umgebung eines jeden Punktes $r \in D$ nach oben beschränkt ist. Da wir p nach Satz 6 in jeden uniformisierbaren Punkt von R eindeutig plurisubharmonisch fortsetzen können, dürfen wir annehmen, daß D in der Menge $\Phi^{-1}(V)$ enthalten ist.

Wir zeigen zunächst, daß höchstens eine plurisubharmonische Fortsetzung von p aus $R - \Phi^{-1}(V)$ in R möglich ist. Angenommen, es gäbe zwei solche Fortsetzungen $\breve{p}$ und $\breve{p}'$. Dann gilt also $\breve{p}'(r) = \breve{p}(r)$ für jeden Punkt $r \in R - \Phi^{-1}(V)$. Ist nun $r_0 \in \Phi^{-1}(V)$ irgendein Punkt, so legen wir eine eindimensionale analytische Ebene E durch $\mathfrak{z}_0 = \Phi(r_0)$, derart, daß E in der Nähe von $\mathfrak{z}_0$ die Menge V nur in $\mathfrak{z}_0$ schneidet. Es zerfällt $\Phi^{-1}(E - \mathfrak{z}_0)$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ in endlich viele zusammenhängende RIEMANNsche Flächen; der Punkt r_0 ist Häufungspunkt wenigstens einer derselben, etwa $\widetilde{F}$. Dann folgt, da $\breve{p}$ und $\breve{p}'$ nach Voraussetzung beide plurisubharmonisch in R sind und in $R - \Phi^{-1}(V)$ mit p übereinstimmen, unter Verwendung von Hilfssatz 5:

$$\overline{\lim_{r\to r_0,\ r\in\widetilde{F}}} p(r) = \begin{cases} \breve{p}(r_0), \\ \breve{p}'(r_0). \end{cases}$$

Daher gilt auch $\breve{p}(r_0) = \breve{p}'(r_0)$; mithin gibt es höchstens eine plurisubharmonische Fortsetzung von p in R.

Wir werden nun zeigen, daß die Funktion

$$\breve{p}(r) = \overline{\lim_{r'\to r,\ r'\in R-D}} p(r'), \qquad D \subset \Phi^{-1}(V),$$

tatsächlich eine plurisubharmonische Fortsetzung von p in R ist.

Zu dem Zwecke sei τ irgendeine holomorphe Abbildung eines Gebietes W der z-Ebene in R; wir dürfen annehmen, daß τ nicht konstant ist. Dann ist die zur Abbildung

$$\Phi \circ \tau: \quad z_1 = f_1(z), \ldots, z_n = f_n(z)$$

gehörende Funktionalmatrix $(f_1'(z), \ldots, f_n'(z))$ bis auf eine in W isoliert liegende Punktmenge S' vom Maximalrang. Es gibt deshalb zu jedem Punkt $z^{(0)} \in W - S'$ eine Umgebung $U'(z^{(0)}) < W - S'$, derart, daß $\Phi \circ \tau(U')$ eine in einer Umgebung U'' von $\zeta_0 = \Phi \circ \tau(z^{(0)})$ eindimensionale analytische Menge A ist. Wir ziehen nun folgenden hier nicht zu beweisenden Hilfssatz heran (zum Beweise desselben vgl. [6]).

Hilfssatz 7. Es sei (R'', Φ, U'') eine analytisch-verzweigte Überlagerung; es sei A eine eindimensionale analytische Menge in U''. Dann gibt es eine isolierte Punktmenge S^* in A, so daß $(\Phi^{-1}(A - S^*), \Phi, A - S^*)$ eine unverzweigte Überlagerung ist.

Auf Grund dieses Hilfssatzes gibt es zu jedem Punkt $\zeta_1 \in A - S^*$ eine n-dimensionale Umgebung $U^*(\zeta_1) < U''$, derart, daß jede zusammenhängende Komponente $R_\varkappa$ von $\Phi^{-1}(U^*)$ über $(A - S^*) \cap U^*$ einblättrig ist. Ist nun $\breve{p}_\varkappa$ die Beschränkung von $\breve{p}$ auf $R_\varkappa$ und bezeichnet $\breve{q}_\varkappa$ die in U^* definierte, zu $\breve{p}_\varkappa$ gehörende elementarsymmetrische Funktion, so ist nach Hilfssatz 6 jede dieser Funktionen $\breve{q}_\varkappa$ plurisubharmonisch in U^*. Da über jedem Punkt von $(A - S^*) \cap U^*$ jeweils nur ein Punkt von $R_\varkappa$ liegt, stimmt $\breve{p}_\varkappa$ auf

$$\Phi^{-1}\big((A - S^*) \cap U^*\big) \cap R_\varkappa$$

mit $\breve{q}_\varkappa$ auf $(A - S^*) \cap U^*$ überein. Daraus folgt aber, daß die Beschränkung von $\breve{p}$ auf $\Phi^{-1}(A - S^*)$ eine subharmonische Funktion ist. Setzt man nun $S = (\Phi \circ \tau)^{-1}(S^*) \cap U'(z^{(0)})$, so ist S eine isolierte Punktmenge in $U'(z^{(0)})$; da τ die Menge $U' - S$ in $\Phi^{-1}(A - S^*)$ abbildet, ist $\breve{p} \circ \tau$ subharmonisch in $U' - S$. Es bleibt zu zeigen, daß $\breve{p} \circ \tau$ auch in allen Punkten von S selbst subharmonisch ist; sei also $z^{(1)} \in S$ irgendein Punkt. Wir wählen eine Umgebung $\hat{U}\big(\Phi \circ \tau(z^{(1)})\big)$ so, daß $\big(\Phi^{-1}(\hat{U}), \Phi, \hat{U}\big)$ eine zusammenhängende, s-blättrige Komponente $\hat{R}$ enthält, die über $\zeta_1 = \Phi \circ \tau(z^{(1)})$ nur den einen Punkt $r_1 = \tau(z^{(1)})$ besitzt.

Es sei $\breve{p}(r_1) = m$. Wir bilden in $\hat{U}$ zu der Beschränkung von $\breve{p}$ auf $\hat{R}$ die elementarsymmetrische Funktion $\breve{q}(\zeta)$; dieselbe ist nach Hilfssatz 6 in $\hat{U}$ plurisubharmonisch. Deshalb ist $\breve{q} \circ \Phi \circ \tau$ in der Umgebung von $z^{(1)}$ subharmonisch. Es gilt: $\overline{\lim\limits_{z \to z^{(1)}}} \frac{1}{s} \breve{q} \circ \Phi \circ \tau(z) = m$.

Andererseits gilt, falls man $\overline{\lim\limits_{z \to z^{(1)}}} \breve{p} \circ \tau(z) \leq m_1 < m$ annimmt:

$$\frac{1}{s} \overline{\lim_{z \to z^{(1)}}} \breve{q} \circ \Phi \circ \tau(z) = \overline{\lim_{z \to z^{(1)}}} \frac{1}{s} \left(\breve{p} \circ \tau(z) + \sum_{\substack{r_\sigma \in \Phi^{-1} \Phi \tau(z) \cap \hat{R} \\ r_\sigma \neq \tau(z)}} \breve{p}(r_\sigma) \right)$$

$$\leq \frac{m_1}{s} + \frac{s-1}{s} m < m.$$

Also muß gelten $\overline{\lim\limits_{z \to z^{(1)}}} \breve{p} \circ \tau(z) = m$; d.h. aber, daß $\breve{p} \circ \tau(z^{(1)})$ mit der subharmonischen Fortsetzung von $\breve{p} \circ \tau$ in $z^{(1)}$ übereinstimmt. Die Funktion $\breve{p} \circ \tau$ ist somit in jedem Punkt von U' subharmonisch. Daraus folgt, daß $\breve{p} \circ \tau$ in $W - S'$ subharmonisch ist. Wiederholt man den soeben durchgeführten Schluß für die ebenfalls isoliert liegenden Punkte von S', so ergibt sich, daß $\breve{p} \circ \tau$ überall in W subharmonisch ist. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

7. Wir beweisen nun abschließend Satz 4, indem wir zeigen, daß unter seinen Voraussetzungen auch die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt sind. Wir können wieder annehmen, daß X eine analytisch-verzweigte Überlagerung (R, Φ, G) ist und dürfen weiter, falls G hinreichend klein gewählt ist, laut Definition der dünnen Menge sogar voraussetzen, daß es eine in G analytische, höchstens $(n-2)$-dimensionale Menge M gibt, so daß gilt: $D \subset \Phi^{-1}(M)$. Wir zeigen, daß $p(r)$ in einer Umgebung eines jeden Punktes aus D nach oben beschränkt ist. Damit ist dann der Satz bewiesen, da eine dünne Menge der Ordnung 2 erst recht dünn von der Ordnung 1 ist. Angenommen, $r' \in D$ sei ein Punkt, in dessen Umgebung p nicht nach oben beschränkt ist. Dann gibt es eine gegen r' konvergierende Punktfolge $r_\nu \in R - \Phi^{-1}(M \cup V)$[7]), so daß gilt: $\lim\limits_{\nu \to \infty} p(r_\nu) = +\infty$. Wir setzen $\mathfrak{z}_\nu = \Phi(r_\nu)$, $\mathfrak{z}' = \Phi(r')$; dann gilt $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{z}_\nu = \mathfrak{z}'$. Es sei nun E' eine eindimensionale analytische Ebene durch $\mathfrak{z}'$, die $M \cup V$ in einer Hyperkugel $H(\mathfrak{z}') \subset\subset G$ nur in $\mathfrak{z}'$ schneidet. Es gibt dann eine gegen E' konvergierende Folge E_ν von eindimensionalen analytischen Ebenen durch $\mathfrak{z}_\nu$, die $M \cap H$ nirgends und $V \cap H$ nur punkthaft schneiden. Es gibt weiter eine reelle Zahl k, so daß für jeden Punkt $r \in \Phi^{-1}(E' \cap \partial H)$ gilt: $p(r) < k$. Aus der Halbstetigkeit von p nach oben folgt, daß diese Ungleichung auch noch in einer ganzen Umgebung U von $\Phi^{-1}(E' \cap \partial H)$ gilt. Wählt man ν hinreichend groß, so ist $\Phi^{-1}(E_\nu \cap \partial H)$ in U enthalten. Da $\left(\Phi^{-1}(E_\nu \cap H - V), \Phi, E_\nu \cap H - V\right)$ zu einer Überlagerung von $E_\nu \cap H$ fortsetzbar ist, ergibt das Maximumprinzip, daß $p(r)$ auf $\Phi^{-1}(E_\nu \cap H)$ kleiner als k ist. Deshalb gilt auch $p(r_\nu) \leqq k$, da $r_\nu \in \Phi^{-1}(E_\nu \cap H)$. Daraus folgt aber $\lim\limits_{\nu \to \infty} p(r_\nu) \leqq k$ im Widerspruch zur Annahme. Satz 4 ist bewiesen.

Literatur

[1] Brelot, M.: Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. Act. scient. et ind. **139**, II, 5—55 (1934). — [2] Bremermann, H.: On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions. Math. Ann. **131**, 76—86 (1956). — [3] Cartan, H.: Séminaire E.N.S. Paris 1951/52 u. 1953/54 (hektographiert). — [4] Grauert, H., u. R. Remmert: Zur Theorie der Modifikationen I. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955). — [5] Grauert, H., et R. Remmert: Fonctions plurisousharmoniques dans des espaces analytiques. Généralisation d'un théorème d'Oka. C. R. Acad. Sci. Paris **241**, 1371—1373 (1955). — [6] Grauert, H., u. R. Remmert: Analytisch-verzweigte Überlagerungen und komplexe Räume. Erscheint demnächst in den Math. Ann. — [7] Hirzebruch, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126**, 1—22 (1953). — [8] Hitotumatu, S.: On some conjectures concerning pseudo-convex domains. J. Math. Soc. Jap. **6**, 173—195 (1954). — [9] Lelong, P.: Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques. Colloque sur les Fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 21—40, 1953. — [10] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX: Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. **23**, 97—155 (1953). — [11] Remmert, R., u. K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953).

[7]) Das folgt unter Verwendung von Satz 3!

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 1. Januar 1956)

Bojanić, R., W. Jurkat u. A. Peyerimhoff
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 195—199 (1956)

Über einen Taubersatz für Faltungen

Von

R. Bojanić, W. Jurkat und A. Peyerimhoff

Von Herrn Erdös wurde kürzlich [3] die Frage aufgeworfen nach Aussagen über die Größenordnung von Folgen $\{s_n\}$ mit den Eigenschaften

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_{n-\nu} a_\nu = \frac{n^2}{2} + O(n) \qquad \left(s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right) \tag{1}$$

und

$$a_n \geq 0. \tag{2}$$

Herr Erdös zeigt, daß stets $s_n = n + o(n)$ ist, während $s_n = n + o\left(\sqrt{n}\right)$ nicht gefolgert werden kann.

Herr Avakumović hat bewiesen [1], daß aus (1) und (2) die Beziehung $s_n = n + O\left(n^{\sqrt{3}-1+\varepsilon}\right)$ folgt für jedes $\varepsilon > 0$.

Wir werden im folgenden zeigen, daß sogar $s_n = n + O\left(n^{\frac{1}{3}} (\log n)^{\frac{1}{3}}\right)$ aus (1) und (2) gefolgert werden kann. Es verlangt keine Mehrarbeit, dieses Ergebnis gleich in etwas allgemeinerer Form für Stieltjes-Integrale auszusprechen und zu beweisen.

§ 1. Es sei $A(t)$ eine Funktion mit den Eigenschaften

$$A(0) = 0, \quad A(t_2) \geq A(t_1) \quad \text{für } t_2 \geq t_1 \geq 0 \tag{3}$$

und

$$A(t) = \tfrac{1}{2}\left(A(t+0) + A(t-0)\right) \quad \text{für alle } t > 0.$$

Das Integral $h(x) = \int_0^x A(x-t)\, dA(t)$ existiert für alle $x \geq 0$ mit eventueller Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge und kann überall so festgesetzt werden, daß $h(x)$ eine monoton wachsende Funktion ist mit $h(0) = 0$, $h(x) = \tfrac{1}{2}\left(h(x+0) + h(x-0)\right)$ für alle $x > 0$ (vgl. [4], theorem 11.2a, S. 84 und den Beweis auf S. 85). Für jede Funktion $A(t)$ mit der Eigenschaft (3) ist damit das Integral $\int_0^x A(x-t)\, dA(t)$ eindeutig erklärt. Wir verwenden bei unseren Überlegungen den folgenden einseitigen Konvexitätssatz.

Hilfssatz. Es sei $k > 0$ und $W(x)$ sei eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{cases} W(x) \text{ ist erklärt (und endlich) für } x \geq 0, \\ 0 < W(x_1) \leq W(x_2) \text{ für } 0 \leq x_1 \leq x_2, \\ \text{mit positiven Konstanten } C_1 \text{ und } C_2 \text{ ist } W(x') \leq C_1 W(x) \\ \text{für } 0 \leq x < x' \leq x + C_2 \left(W(x)\right)^{1/(k+1)}. \end{cases} \tag{4}$$

Ist ferner $C(t)$ für $t \geqq 0$ eine meßbare Funktion, die in jedem Intervall $0 \leqq t \leqq T$ beschränkt ist, so folgt aus

$$\int_0^x (x-t)^{k-1} C(t)\, dt = O\big(W(x)\big) \quad (x \to \infty) \tag{5}$$

und

$$\begin{cases} C(x+t) - C(x) \geqq C_3 \big(W(x)\big)^{\frac{1}{k+1}}, \quad C(x) - C(x-t) \geqq C_3 \big(W(x)\big)^{\frac{1}{k+1}} \\ (C_3 \text{ eine beliebige Konstante}) \text{ für alle } x \geqq 0 \text{ und} \\ 0 < t \leqq C_4 \big(W(x)\big)^{1/(k+1)} \big(C(y) = 0 \text{ für } y < 0\big) \end{cases} \tag{6}$$

die Beziehung

$$C(x) = O(1)\, \big(W(x)\big)^{\frac{1}{k+1}} \quad (x \to \infty). \tag{7}$$

Für einen Beweis vgl. [2], § 1.8, S. 23 (die Beweismethode bleibt bei den hier vorgenommenen Änderungen anwendbar). Im folgenden werden wir nur den Spezialfall $k=2$, $W(x) = x^2 \log x$ $(x \geqq 2)$ verwenden.

Es gilt nun der

Satz 1. *Ist $A(t)$ eine Funktion mit den Eigenschaften* (3), *so folgt aus*

$$h(x) = \int_0^x A(x-t)\, dA(t) = \frac{x^2}{2} + O(x) \quad (x \to \infty) \tag{8}$$

die Beziehung

$$A(x) = x + O(1)\, x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \to \infty). \tag{9}$$

Wir zerlegen den Beweis in einzelne Teile.

1. Wegen (3) und (8) ist

$$A^2\Big(\frac{x}{2}\Big) \leqq \int_0^{x/2} A(x-t)\, dA(t) \leqq \int_0^x A(x-t)\, dA(t) = O(x^2) \quad (x \to \infty)$$

für alle x mit eventueller Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge. Wegen (3) ist somit für alle x

$$A(x) = O(x) \quad (x \to \infty). \tag{10}$$

2. Wegen (3) und (10) ist $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dA(t)$ konvergent für $\Re s > 0$. Für $\Re s > 0$ ist also $f^2(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dh(t) = s \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt$ (vgl. [4], theorem 11.7b, S. 91 und beachte, daß $h(0) = 0$ ist). Wegen (8) ist nun

$$f^2(s) = \frac{1}{s^2}\Big(1 + g(s)\, \frac{s^3}{\sigma^2}\Big) \quad \text{mit} \quad |g(s)| \leqq K \text{ für } 0 < \sigma = \Re s \leqq 1. \tag{11}$$

3. Im folgenden sei stets $s = \sigma + it$. Für $\frac{|s|^3}{\sigma^2} < \frac{1}{2K}$ und $0 < \sigma \leqq 1$ folgt aus (11) die Relation

$$f(s) = \frac{1}{s}\Big(1 + g_1(s)\, \frac{s^3}{\sigma^2}\Big) \quad \text{mit} \quad |g_1(s)| \leqq K_1. \tag{12}$$

[Das Vorzeichen dieser Wurzel ergibt sich aus der Tatsache, daß $f(s) > 0$ ist für $s > 0$.]

Für $\frac{|s|^3}{\sigma^2} \geq \frac{1}{2K}$ und $0 < \sigma \leq 1$ folgt aus (11) die Abschätzung

$$|f(s)| \leq \frac{1}{|s|}\left(1 + |g(s)|\frac{|s|^3}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{3}} \leq K_2 \frac{|s|^{\frac{1}{2}}}{\sigma}. \tag{13}$$

4. Wegen (3) $(A(0) = 0)$ ist $f(s) - \frac{1}{s} = s\int_0^\infty (A(t) - t)\, e^{-st}\, dt$ für $\sigma > 0$. Setzt man zur Abkürzung $B(t) = \int_0^t (t-\tau)\,(A(\tau) - \tau)\, d\tau$ und $\frac{1}{s^3}\left(f(s) - \frac{1}{s}\right) = \eta(s)$, so ist (vgl. [4], theorem 12.1a, S. 91)

$$\eta(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, B(t)\, dt, \tag{14}$$

wobei dieses Integral absolut konvergent ist für $\sigma > 0$. Die Funktion $\eta(s)$ erfüllt für $0 < \sigma \leq 1$ die Beziehung

$$|\eta(s)| \leq \begin{cases} \frac{K_1}{|s|\,\sigma^2} & \text{für} \quad |s|^3 < \frac{1}{2K}\sigma^2 \\ \frac{K_3}{|s|^{\frac{5}{2}}\,\sigma} & \text{für} \quad |s|^3 \geq \frac{1}{2K}\sigma^2. \end{cases} \tag{15}$$

Die erste dieser Beziehungen folgt unmittelbar aus (12), die zweite aus (13) zusammen mit der aus $|s|^3 \geq \frac{1}{2K}\sigma^2$ folgenden Ungleichung $\frac{1}{|s|^4} \leq (2K)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma |s|^{\frac{5}{2}}}$.

5. Aus (14) folgt die Beziehung

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \eta(s)\, e^{xs}\, ds \quad (x > 0), \tag{16}$$

wobei das Integral wegen (15) absolut konvergiert für $c > 0$ (vgl. [4], theorem 7.3, S. 66). Mit $0 < \sigma = c \leq 1$ folgt aus (16) wegen (15) die Abschätzung

$$e^{-xc}|B(x)| \leq \frac{K_4}{c^2}\int_{|s|^3 \leq \frac{1}{2K}\sigma^2} \frac{dt}{|c+it|} + \frac{K_5}{c}\int_{|s|^3 \geq \frac{1}{2K}\sigma^2} \frac{dt}{|c+it|^{\frac{5}{2}}} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Setzt man $c = \frac{1}{x}$, so ist für $x \to \infty$ und passende Konstanten $\varrho > 0$, $\delta > 0$,

$$\mathrm{I} = O(x^2)\int_0^{x^{-1}} \frac{dt}{x^{-1}} + O(x^2)\int_{x^{-1}}^{\varrho x^{-\frac{3}{2}}} \frac{dt}{t} = O(x^2 \log x)$$

und

$$\mathrm{II} = O(x)\int_{\delta x^{-\frac{3}{2}}}^\infty \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} = O(x^2).$$

Zusammengefaßt ergibt sich also

$$B(x) = O(x^2 \log x) \quad (x \to \infty). \tag{17}$$

6. Setzen wir im Hilfssatz $k = 2$, $W(x) = x^2 \log x$ $(x \geq 2)$, $W(x) = 4 \log 2$ $(0 \leq x \leq 2)$ [diese Funktion erfüllt die Bedingung (4)] und $C(t) = A(t) - t$, so ist (5) erfüllt wegen (17). Aus (3) folgen die Beziehungen $C(x+t) - C(x) \geq -t$, $C(x) - C(x-t) \geq -t$, so daß auch (6) erfüllt ist. Die Behauptung (7) des

Hilfssatzes ist nun gleichbedeutend mit der zu beweisenden Beziehung (9). Damit ist Satz 1 bewiesen.

Ist $\{a_\nu\}$ eine Folge nicht negativer Zahlen und setzen wir $A(0)=0$, $A(x)=\sum_{\nu<x} a_\nu$ für $x\neq 0, 1, 2, \ldots$, $A(n)=\frac{1}{2}\big(A(n+0)+A(n-0)\big)$, so erfüllt diese Funktion die Bedingungen (3). Erfüllt $\{a_\nu\}$ noch die Bedingung (1), so genügt $A(x)$ den Voraussetzungen von Satz 1, denn es ist für $n<x<n+1$

$$h(x)=\int_0^x A(x-t)\,dA(t)=\sum_{\nu=0}^{n} s_{n-\nu}\,a_\nu=\frac{x^2}{2}+O(x)\quad(x\to\infty).$$

Als Anwendung von Satz 1 erhalten wir so den zu Anfang dieser Arbeit ausgesprochenen Sachverhalt.

Satz 2. *Erfüllt eine Folge $\{a_n\}$ die Bedingungen* (1) *und* (2), *so ist* $s_n=n+O(1)\,n^{\frac{3}{4}}(\log n)^{\frac{1}{2}}$ $(n\to\infty)$.

§ 2. Man wird bei einer genauen Durchsicht des Beweises von Satz 1 feststellen, daß die Voraussetzung $A(t_1)\leqq A(t_2)$ $(0\leq t_1\leqq t_2)$ im wesentlichen nur im Punkt 1 verwendet wird (d.h. bei der Feststellung der Konvergenz von $\int_0^\infty e^{-st}dA(t)$ für $\Re s>0$), während etwa bei der Anwendung des Konvexitätssatzes die allgemeinere Voraussetzung $A(t_2)-A(t_1)\geqq -K(t_2-t_1+1)$ $(t_2\geqq t_1)$ ausreichend gewesen wäre. So erhebt sich die Frage, ob Satz 1 unter dieser allgemeineren Voraussetzung noch richtig bleibt, wobei die Behauptung natürlich dahingehend zu erweitern ist, daß eine der beiden Möglichkeiten $A(x)=\pm x+O(1)\,x^{\frac{3}{4}}(\log x)^{\frac{1}{2}}$ eintritt. Das folgende Beispiel lehrt, daß dies nicht zutrifft. Wir zeigen, daß Satz 2 mit $a_n\geqq -K$ statt (2) falsch wird.

Es sei $\{a_n\}$ erklärt durch $\sum a_n z^n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-2z}\,\sqrt{1-5z}}{1-z}$. Setzt man

$$b_n=-\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\frac{3}{4}}A_\nu^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{5}\right)^\nu\qquad\left(A_n^k=\binom{n+k}{n}\right),$$

so gilt

$$\frac{b_n}{A_n^{-\frac{3}{4}}}=\frac{-1}{A_n^{-\frac{3}{4}}}\sum_{\nu<\sqrt{n}} A_{n-\nu}^{-\frac{3}{4}}A_\nu^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{5}\right)^\nu+O\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{n}}n^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\to-\sum_{\nu=0}^{\infty}A_\nu^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{5}\right)^\nu=-\sqrt{\frac{3}{5}}\quad(n\to\infty).$$

Wegen $a_n=-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}5^\nu b_\nu$ ist somit $a_n\geqq C\,\frac{5^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ für ein $C>0$ und alle großen n, so daß $a_n\geqq -K$ ist, während $s_n\simeq\pm n$ nicht richtig ist. Mit der Abkürzung $t_n=\sum_{\nu=0}^{n}s_{n-\nu}a_\nu$ ist schließlich $\sum t_n z^n=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-2z)(1-5z)}{(1-z)^3}$, woraus sich sofort die Beziehung $t_n=\frac{n^2}{2}+O(n)$ $(n\to\infty)$ ergibt.

Der Satz 1 bleibt aber richtig, wenn wir in (3) die Bedingung $A(t_1)\leq A(t_2)$ $(0\leq t_1\leq t_2)$ ersetzen durch $A(t_2)-A(t_1)\geqq -K(t_2-t_1+1)$ $(0\leq t_1\leq t_2)$[1] und

[1] Außerdem ist stillschweigend vorausgesetzt, daß $A(t)$ von beschränkter Schwankung ist in jedem Intervall $0\leq t\leq T$.

zusätzlich noch fordern, daß das Integral $\int_0^\infty e^{-st}dA(t)$ für $\Re s > 0$ konvergiert. Durch die Forderung $h(0)=0$, $h(x)=\frac{1}{2}\big(h(x+0)+h(x-0)\big)$ $(x>0)$ ist das Integral $h(x)=\int_0^x A(x-t)\,dA(t)$ für alle $x \geqq 0$ in eindeutiger Weise erklärt (vgl. [4], S. 84), und es gilt die folgende Ergänzung zu Satz 1.

Satz 3. *Es sei $A(t)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften*[1])

$$(18)\qquad \begin{cases} A(0)=0, \quad A(t_2)-A(t_1) \geqq -K(t_2-t_1+1) & \textit{bzw.} \\ A(t_2)-A(t_1) \leqq K(t_2-t_1+1) & \textit{für} \quad 0 \leqq t_1 \leqq t_2, \\ A(t)=\frac{1}{2}\big(A(t+0)+A(t-0)\big) & (t>0). \end{cases}$$

Erfüllt $A(t)$ die Bedingungen (8) *und*

$$(19)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log|A(t)|}{t} \leqq 0,$$

so gilt eine der Beziehungen

$$(20)\qquad A(x)=\pm x + O(1)\,x^{\frac{3}{4}}(\log x)^{\frac{1}{8}} \quad (x\to\infty).$$

Der Beweis verläuft fast ebenso wie der Beweis von Satz 1. Der Schritt 1. fällt weg, die Existenz von $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}dA(t)$ für $\Re s>0$ ergibt sich aus (19) und die Überlegungen von Schritt 2. bleiben ungeändert, insbesondere ist (11) richtig. Für $\frac{|s|^3}{\sigma^2} < \frac{1}{2K}$, $0<\sigma\leqq 1$ besitzt $f(s)$ wegen (11) keine Nullstellen, und wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f(s)>0$ ist für kleine $s>0$ [beachte (18)]. Die folgenden Schritte des Beweises von Satz 1 bleiben ungeändert bis auf die Anwendung des Hilfssatzes in 6., wo aber unsere allgemeinere Voraussetzung (18) noch ausreicht, um die Behauptung (20) abzuleiten.

Im Spezialfall der Folgen ergibt sich aus Satz 3 eine Ergänzung zu Satz 2.

Satz 4. *Erfüllt eine Folge $\{a_n\}$ die Bedingung* (1) *und ist $a_n \geqq -K$ (bzw. $a_n \leqq K$) und $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqq 1$, so ist $s_n=\pm n + O(1)\,n^{\frac{3}{4}}(\log n)^{\frac{1}{8}}$ $(n\to\infty)$.*

Literatur

[1] Avakumović, V. G.: A note on a question set by P. Erdös and L. K. Hua. Publ. Inst. math. Beograd **6**, 47—56 (1954). — [2] Chandrasekharan, K., and S. Minakshisundaram: Typical means. Oxford 1952. — [3] Erdös, P.: Supplementary note. J. Ind. Math. Soc. **13**, 145—147 (1949). — [4] Widder, D. V.: The Laplace transform. Princeton 1946.

Trg. Republike 3/VI, Beograd (Jugoslavien)
Tübingen, Amselweg 18
Dept. of Math., Univ. of Cincinnati, Cincinnati, Ohio (USA)

(Eingegangen am 10. Oktober 1955)

Dold, A.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 200—206 (1956)

Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

Von

Albrecht Dold

Einleitung. Wu hat in [9] folgendes Verfahren zur Bestimmung der Stiefel-Whitneyschen Klassen W_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, einer n-dimensionalen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n angegeben: Es bezeichne $H^*(M^n) = \sum_{\nu=0}^{n} H^\nu(M^n)$ den Kohomologiering mod 2 von M^n. Die Gruppen $H^p(M^n)$ und $H^{n-p}(M^n)$, $p = 0, 1, \ldots, n$, sind bezüglich des Cup-Produktes $H^p(M^n) \times H^{n-p}(M^n) \to H^n(M^n) = Z_2$ (= zyklisch von der Ordnung 2) dual zueinander. Es gibt also eine eindeutig bestimmte Kohomologieklasse $U_p \in H^p(M^n)$ mit

$$U_p \cdot Y_{n-p} = Sq^p Y_{n-p} \quad \text{für alle } Y_{n-p} \in H^{n-p}(M^n). \tag{1}$$

[1])

Aus den U_p erhält man die W_i durch

$$W_i = \sum_{p=0}^{i} Sq^{i-p} U_p, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Diese Wusche Methode zeigt, daß zwischen den Klassen W_i Relationen bestehen. Es sei nämlich $P_q(W_i)$ ein homogenes Polynom in den W_i vom Gewicht q (das Gewicht eines Monoms $\prod_{i=0}^{n} W_i^{q_i}$ ist $\sum_{i=0}^{n} i q_i$). Nach (1) ist

$$U_{n-q} \cdot P_q(W_i) = Sq^{n-q} P_q(W_i). \tag{3}$$

Mit Hilfe der Wuschen Formeln ([10], (1) oder [1], 7.1)

$$\begin{cases} Sq^r W_i = \sum_{t=0}^{r} \binom{i-r+t-1}{t} W_{r-t} \cdot W_{i+t}, \ r \leq i, \ W_\nu = 0 \text{ für } \nu > n, \\ \binom{a}{b} = 1 \text{ für } b = 0, \quad \binom{a}{b} = 0 \text{ für } a < b, b \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

und der Cartanschen Produktformel ([2], (5))

$$Sq^p(X \cdot Y) = \sum_{\nu+\mu=p} Sq^\nu X \cdot Sq^\mu Y \tag{5}$$

[1]) Mit Sq^p bezeichnen wir diejenige „square"-Kohomologieoperation mod 2 (s. [6] oder [7]), die die Dimension um p erhöht.

läßt sich die rechte Seite von (3) als Polynom (vom Gewicht n) in den W_i schreiben. Aus der [mit (2) identischen] Rekursionsformel $U_i = W_i + \sum_{p=0}^{i-1} Sq^{i-p} U_p$ erhält man wegen (4) und (5) eine Darstellung von U_p als Polynom in den W_i und damit die linke Seite von (3) als Polynom (vom Gewicht n) in den W_i. So ergibt sich z.B. für $P_q = W_{n-1}$ die Relation $W_1 \cdot W_{n-1} = W_1 \cdot W_{n-1} + n W_n$, d.h. $W_n = 0$ für ungerades n.

Die Relationen (3) zwischen den Klassen W_i sind von der besonderen Form $P_n(W_i) = 0$, wo $P_n(W_i)$ ein homogenes Polynom in den W_i vom Gewicht n ist. Die Werte, die die homogenen Polynome in den W_i vom Gewicht n auf dem Grundzykel der Mannigfaltigkeit M^n annehmen, nennt man die STIEFEL-WHITNEYschen Zahlen von M^n; (3) besagt also, daß gewisse STIEFEL-WHITNEYsche Zahlen in allen Mannigfaltigkeiten M^n Null sind. Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen, daß jede Relation zwischen STIEFEL-WHITNEYschen Zahlen n-dimensionaler kompakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten Linearkombination von Relationen (3) ist.

Dieses Ergebnis stellt eine Teilantwort auf eine Frage von THOM ([8], S. 77—78) dar; der Beweis beruht auf einer Anwendung der Methoden und Ergebnisse von THOM [8].

I. Bezeichnungen, Vorbemerkungen. Es sei $\mathfrak{X}$ ein topologischer Raum. $H^*(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H^\nu(\mathfrak{X})$ bezeichne den (singulären) Kohomologiering mod 2 von $\mathfrak{X}$. Wir setzen (zur Vereinfachung) voraus, daß $H^\nu(\mathfrak{X}) = 0$ ist für hinreichend großes ν. Ist $c \in H^*(\mathfrak{X})$, so bezeichnet c_ν die ν-dimensionale Komponente von c: $c_\nu \in H^\nu(\mathfrak{X})$, $c = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$.

Ein Element c aus $H^*(\mathfrak{X})$ mit $c_0 = 1$ [= Einselement von $H^*(\mathfrak{X})$] besitzt ein eindeutig bestimmtes Inverses in $H^*(\mathfrak{X})$, nämlich $c^{-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (1-c)^\mu$. (Beweis: $c \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} (1-c)^\mu = \big(1-(1-c)\big) \sum_{\mu=0}^{\infty} (1-c)^\mu = 1$.)

Wir bezeichnen mit Sq die Summe der STEENRODschen Operationen $Sq^i: H^*(\mathfrak{X}) \to H^*(\mathfrak{X})$[1]) und bemerken:

$Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i$ ist ein multiplikativer Automorphismus von $H^*(\mathfrak{X})$[2]).

Die CARTANsche Produktformel (5) besagt nämlich gerade, daß Sq ein multiplikativer Homomorphismus ist. Ist ferner $0 \neq c \in H^*(\mathfrak{X})$ und ν die kleinste ganze Zahl mit $c_\nu \neq 0$, so ist (wegen $Sq^0 =$ Identität) $(Sq\, c)_\nu = c_\nu \neq 0$, also $Sq\, c \neq 0$, also Sq ein Isomorphismus. Ist schließlich d ein beliebiges Element aus $H^*(\mathfrak{X})$ und $c = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ durch die Rekursionsformel

$$c_\nu = d_\nu + \Big(Sq \sum_{\varrho < \nu} c_\varrho\Big)_\nu \tag{6}$$

[2]) Diese für das Folgende sehr nützliche Bemerkung verdanke ich Herrn PUPPE; vgl. auch [3].

definiert, so ist $(Sqc)_\nu = \left(Sq \sum_{\varrho \leq \nu} c_\varrho\right)_\nu = (Sqc_\nu)_\nu + \left(Sq \sum_{\varrho < \nu} c_\varrho\right)_\nu = c_\nu + \left(Sq \sum_{\varrho < \nu} c_\varrho\right)_\nu = d_\nu$, also $Sqc = d$, d.h. Sq ein Homomorphismus *auf* $H^*(\mathfrak{X})$.

II. Eigenschaften des Kohomologieringes mod 2 der GRASSMANNschen Mannigfaltigkeiten. Es bezeichne $O(l)$ die (reelle) orthogonale Gruppe in l Variablen und $G_{r,s}$ die GRASSMANNsche Mannigfaltigkeit $O(r+s)/O(r) \times O(s)$ (= Mannigfaltigkeit der nicht-orientierten r-dimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt des euklidischen Raumes R^{r+s}); dabei sei $r \leqq s$.

$G_{r,s}$ ist Basisraum einer $(s-1)$-universellen $O(r)$-Faserung

$$\mathfrak{B} = \{O(r+s)/O(s), p, G_{r,s}, O(r), O(r)\}$$

sowie einer $(r-1)$-universellen $O(s)$-Faserung

$$\overline{\mathfrak{B}} = \{O(r+s)/O(r), \overline{p}, G_{r,s}, O(s), O(s)\}$$

(s. [5], 19.7). w_i und $\overline{w}_j$, $i, j = 0, 1, \ldots$, seien die STIEFEL-WHITNEYschen Klassen mod 2 von $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ ($w_0 = \overline{w}_0 = 1$, $w_i = 0$ für $i > r$, $\overline{w}_j = 0$ für $j > s$). Die Klassen w_i mit $1 \leq i \leq r$ sind bis zur Dimension $(s-1)$ algebraisch unabhängig und erzeugen $H^*(G_{r,s})$ (bis zur Dimension $s-1$), d.h. $H^*(G_{r,s})$ kann bis zur Dimension $(s-1)$ als Polynomalgebra in den Variablen w_i, $1 \leq i \leq r$, aufgefaßt werden; entsprechendes gilt für die $\overline{w}_j$ mit $1 \leq j \leq s$ (s. [1], Theorem 5.1). Wir benötigen den folgenden

Hilfssatz. *Sei* $w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i$. *Durch die Festsetzungen*

$$w_i \to (w^{-1})_i, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

wird ein gradtreuer multiplikativer Automorphismus D *von* $H^*(G_{r,s})$ (*bis zur Dimension* $r-1$) *definiert, der mit dem* STEENRODschen *Automorphismus* Sq (s. I) *vertauschbar ist.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Gleichung $(w^{-1})_i = \overline{w}_i$, $i = 0, 1, \ldots$. Dazu bilden wir die $O(r+s)$-Hauptfaserung $\mathfrak{B} \oplus \overline{\mathfrak{B}}$ (= WHITNEYsches Produkt oder „join" von $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$). Sei $x \in G_{r,s}$. Die Faser in $\mathfrak{B}$ über x besteht aus allen in x gelegenen orthonormalen r-Beinen y; die in $\overline{\mathfrak{B}}$ aus allen auf x total orthogonalen, orthonormalen s-Beinen $\bar{y}$ des R^{r+s}. Die Faser in $\mathfrak{B} \oplus \overline{\mathfrak{B}}$ über x enthält die Paare $(y, \bar{y})$ und entsteht aus einem solchen Paar, indem man alle möglichen Rechtsverschiebungen (s. [5], 8.10) mit Elementen $g \in O(r+s)$ darauf anwendet. Faßt man $(y, \bar{y})$ als $(r+s)$-Bein, d.h. als Element von $O(r+s)$ auf, dann wird auch $(y, \bar{y}) \cdot g$ zu einem Element aus $O(r+s)$ und man erhält eine fasertreue Abbildung von $\mathfrak{B} \oplus \overline{\mathfrak{B}}$ in $O(r+s)$. Die Faserung $\mathfrak{B} \oplus \overline{\mathfrak{B}}$ ist also das Produkt ([5], § 10) und ihre STIEFEL-WHITNEYschen Klassen sind trivial. Nach dem WHITNEYschen Dualitätssatz (s. [11], Th. II) ist daher $\left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \overline{w}_j\right) = 1$, d.h. $\overline{w}_i = (w^{-1})_i$.

Aus der oben beschriebenen Struktur von $H^*(G_{r,s})$ folgt nun, daß durch (7) tatsächlich ein gradtreuer Automorphismus D von $H^*(G_{r,s})$ (bis zur

Dimension $r-1$) definiert wird, und es bleibt nur noch die Vertauschbarkeit von D mit Sq nachzuweisen. Dafür genügt es zu zeigen, daß $D\,Sq(w_i) = Sq\,D(w_i)$ ist für $i = 0, 1, \ldots$. Nach den Formeln von Wu ([1], 7.1 oder (4)) ist $Sq(w_i)$ ein gewisses Polynom $P_{(i)}(w_\nu)$ in den Klassen w_ν und ebenso ist $Sq(\overline{w}_i) = P_{(i)}(\overline{w}_\nu)$. Hieraus folgt $D\,Sq(w_i) = D\,P_{(i)}(w_\nu) = P_{(i)}(D(w_\nu)) = P_{(i)}(\overline{w}_\nu) = Sq(\overline{w}_i) = Sq\,D(w_i)$, q. e. d.

III. Die Wuschen Relationen. Es seien k, m, n natürliche Zahlen und $k > n$, $m \geqq 2k$. Die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $G_{k,m}$ (s. II) bezeichnen wir abgekürzt mit G_k; der spezielle Wert von m spielt im folgenden keine Rolle.

Ein Element aus $H^n(G_k)$, d.h. (s. II) ein homogenes Polynom $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ in den Variablen w_i, $1 \leqq i \leqq n$, vom Gewicht n, bezeichnen wir als eine *Relation zwischen* Stiefel-Whitneyschen *Zahlen* und wir schreiben $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) \equiv 0$, wenn in jeder n-dimensionalen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n $\pi_n(W_1, W_2, \ldots, W_n) = 0$ ist (W_i die i-te Stiefel-Whitneysche Klasse von M^n).

Sei $w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i$ und $u = Sq^{-1}w$ [s. I, (6)]. Dann ist nach Wu [s. (2) und (3)] $(u \cdot p + Sq\,p)_n \equiv 0$ für jedes $p \in H^*(G_k)$ [für $p \in H^j(G_k)$, $j \geqq n$, ist sogar $(u \cdot p + Sq\,p)_n = 0$]. Wir behaupten nun umgekehrt

Satz 1. *Ein Element $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ aus $H^n(G_k)$ ist genau dann eine Relation zwischen* Stiefel-Whitneyschen *Zahlen, wenn es sich in der Form $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (u \cdot p + Sq\,p)_n$, $p \in H^*(G_k)$, schreiben läßt* $\left(Sq = \sum_{\nu=0}^{\infty} Sq^\nu,\ u = Sq^{-1}w = Sq^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} w_i\right)$.

Setzen wir $p' = u \cdot p$, dann durchläuft mit p auch p' ganz $H^*(G_k)$ (weil u ein inversibles Element ist; s. I), und es ist $u \cdot p + Sq\,p = p' + Sq(u^{-1} \cdot p') = p' + (Sq\,u)^{-1} \cdot Sq\,p' = p' + w^{-1} \cdot Sq\,p'$, letzteres wegen $u = Sq^{-1}w$. Wir erhalten daher den zu Satz 1 äquivalenten

Satz 1'. *Ein Element $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ aus $H^n(G_k)$ ist genau dann eine Relation zwischen* Stiefel-Whitneyschen *Zahlen, wenn es sich in der Form $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (p + w^{-1} \cdot Sq\,p)_n$, $p \in H^*(G_k)$, schreiben läßt.*

Wir geben dem Satz 1 noch eine dritte, zu Satz 1' duale Formulierung, die wir dann im folgenden Abschnitt mit Hilfe der Ergebnisse von Thom [8] beweisen werden.

Jede n-dimensionale differenzierbare[3]) Mannigfaltigkeit M^n läßt sich differenzierbar in die $(n+k)$-Sphäre S^{n+k} einbetten (wegen $k > n$; s. z. B. [4], Th. 5, S. 12). Bezeichnet $W = \sum_{i=0}^{n} W_i$ die Stiefel-Whitneysche Klasse von M^n und $\overline{W} = \sum_{j=0}^{k} \overline{W}_j$ die Stiefel-Whitneysche Klasse des Faserraums der

[3]) Um uns den Thomschen Voraussetzungen in [8] anzupassen, benutzen wir von nun an das Wort „differenzierbar" im Sinne von „unendlich oft differenzierbar"; es genügt offenbar, die Vollständigkeit der Wuschen Relationen für unendlich oft differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu beweisen.

Normalenvektoren von M^n in S^{n+k} (bei einer solchen Einbettung), dann ist nach der WHITNEYschen Dualitätsformel ([11], Th. II) $W \cdot \overline{W} = 1$ (denn die STIEFEL-WHITNEYsche Klasse von S^{n+k} ist 1), d.h. $\overline{W} = W^{-1}$. Ist nun $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in H^n(G_k)$, so folgt hieraus

$$\pi_n(W_1, W_2, \ldots, W_n) = \pi_n\big((\overline{W}^{-1})_1, (\overline{W}^{-1})_2, \ldots, (\overline{W}^{-1})_n\big) = D\,\pi_n(\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_n)$$

(Definition des Automorphismus D im Hilfssatz, Abschnitt II). Insbesondere ist $\pi_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ genau dann eine Relation zwischen STIEFEL-WHITNEYschen Zahlen, wenn in jeder n-dimensionalen kompakten differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von S^{n+k} $D\pi_n(\overline{W}_1, \overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_n) = 0$ ist. Bezeichnen wir ein homogenes Polynom $\bar{\pi}_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vom Gewicht n mit der letztgenannten Eigenschaft als *„Relation zwischen normalen* STIEFEL-WHITNEY*schen Zahlen"*, so führt also der Automorphismus D die Relationen zwischen (tangentialen) STIEFEL-WHITNEYschen Zahlen gerade in die Relationen zwischen normalen STIEFEL-WHITNEYschen Zahlen über. Andererseits führt er die Elemente der Form $(\mathfrak{p} + w^{-1} \cdot Sq\mathfrak{p})_n$, $\mathfrak{p} \in H^*(G_k)$, in $D\big((\mathfrak{p} + w^{-1} \cdot Sq\mathfrak{p})_n\big) = \big(D(\mathfrak{p} + w^{-1} \cdot Sq\mathfrak{p})\big)_n = (D\mathfrak{p} + Dw^{-1} \cdot DSq\mathfrak{p})_n = (D\mathfrak{p} + w \cdot SqD\mathfrak{p})_n$ über, und $D\mathfrak{p}$ durchläuft mit $\mathfrak{p}$ ganz $H^*(G_k)$ (bis zur Dimension $k-1$). Somit ergibt sich der zu Satz 1′ äquivalente

Satz 1″. *Ein Element $\bar{\pi}_n(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ aus $H^n(G_k)$ ist genau dann eine Relation zwischen normalen* STIEFEL-WHITNEY*schen Zahlen, wenn es sich in der Form*

$$\bar{\pi}_n(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (\mathfrak{p} + w \cdot Sq\mathfrak{p})_n, \quad \mathfrak{p} \in H^*(G_k), \tag{8}$$

schreiben läßt $\Big(w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i,\ Sq = \sum_{\nu=0}^{\infty} Sq^\nu\Big)$.

IV. Beweis des Satzes 1″. Wir stellen zunächst einige Ergebnisse von THOM [8] zusammen, die wir zum Beweis des Satzes 1″ benötigen. Die Bezeichnungen und Voraussetzungen sind dieselben wie im Abschnitt III.

THOM konstruiert mit Hilfe des $(2k-1)$-universellen $(k-1)$-Sphärenfaserraumes über G_k

1. eine Pseudomannigfaltigkeit $MO(k)$, die G_k enthält (s. [8], II. 2),

2. einen (additiven) Isomorphismus φ^* von $H^*(G_k)$ auf $H^*_+(MO(k))$ [= Untergruppe der Elemente positiver Dimension von $H^*(MO(k))$], der die Dimension homogener Elemente um k erhöht (s. [8], II. 2),

3. zu jeder n-dimensionalen kompakten differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $M \subset S^{n+k}$ eine bis auf Homotopie bestimmte stetige Abbildung $F_M : S^{n+k} \to MO(k)$, die M in G_k überführt; $f_M : M \to G_k$ bezeichne die durch F_M definierte Abbildung (s. [8], II. 3 oder IV. 4; in IV. 4 hat man von der Orientierung der Mannigfaltigkeiten abzusehen, $MSO(k)$ durch $MO(k)$ und $\hat{G}_k$ durch G_k zu ersetzen).

Es gilt:

A. α) Der durch f_M induzierte Homomorphismus $f_M^* : H^*(G_k) \to H^*(M)$ führt w_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, in die i-te STIEFEL-WHITNEYsche Klasse $\overline{W}_i$ des

Normalenraumes von M in S^{n+k} über. (Aus der Definition von F_M in [8], IV. 4 geht unmittelbar die schärfere Aussage hervor: Der durch f_M induzierte $(k-1)$-Sphärenfaserraum über M ist mit dem Raum der normalen Einheitsvektoren von M äquivalent.)

β) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^*(MO(k)) & \xrightarrow{F_M^*} & H^*(S^{n+k}) \\ {\scriptstyle\varphi^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi^*} \\ H^*(G_k) & \underset{f_M^*}{\to} & H^*(M) \end{array} \tag{9}$$

ist kommutativ. Dabei ist F_M^* der durch F_M induzierte Homomorphismus, und ψ^* ist der zur Injektion $M \to S^{n+k}$ gehörige Umkehrhomomorphismus; ψ^* führt die Grundklasse $m \in H^n(M)$ in die Grundklasse $s \in H^{n+k}(S^{n+k})$ über (s. [8], II. 3; dort sind im Diagramm (1) die Richtungen der horizontalen Pfeile umzukehren).

B. Der durch die Injektion induzierte Homomorphismus $i^*: H^*(MO(k)) \to H^*(G_k)$ bildet (in den Dimensionen >0 und $<2k$) $H_+^*(MO(k))$ isomorph auf das von w_k in $H^*(G_k)$ erzeugte Ideal ab. Wir identifizieren daher $H_+^*(MO(k))$ vermöge i^* mit diesem Ideal. Der Homomorphismus φ^* führt $p \in H^*(G_k)$, $\dim(p) < k$, in $p \cdot w_k$ über ([8], II. 5).

C. $H^{n+k}(MO(k))$ besitzt eine Basis, die sich aus zwei Teilsystemen $\{a^{(i)}\}$ und $\{b^{(j)}\}$ mit den folgenden Eigenschaften zusammensetzt (d.i. die Basis (7) in [8], II. 6; die $a^{(i)}$ sind die Elemente X_ω^{n+k}, die $b^{(j)}$ die übrigen):

α) Ist a eine nicht-triviale Linearkombination von Elementen $a^{(i)}$, so gibt es eine Mannigfaltigkeit $M \subset S^{n+k}$ mit (vgl. A. β) $F_M^*(a) = s \neq 0$ ([8], IV. 6).

β) $b^{(j)} = Sq^{v_j} p^{(j)}$ für geeignetes $p^{(j)} \in H^*(MO(k))$ und $v_j > 0$.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Satzes 1''. Es sei S_k^n die Untergruppe der Elemente c von $H^{n+k}(MO(k))$ mit der Eigenschaft: Bei jeder Abbildung F_M (s. 3.) ist $F_M^*(c) = 0$ (s. A. β). Da der Automorphismus Sq in $H^*(S^{n+k})$ die Identität ist und weil Sq mit F_M^* vertauschbar ist, liegen alle Elemente der Form $(Sq\,p' + p')_{n+k}$, $p' \in H^*(MO(k))$, in S_k^n, insbesondere also die Elemente $b^{(j)}$ aus C. Nach C. α) liegt keine nicht-triviale Linearkombination der $a^{(i)}$ in S_k^n, d.h. S_k^n wird von den $b^{(j)}$ erzeugt und besteht genau aus den Elementen der Form $(Sq\,p' + p')_{n+k}$, $p' \in H^*(MO(k))$.

Betrachten wir nun das Diagramm (9). $\varphi^*: H^n(G_k) \to H^{n+k}(MO(k))$ und $\psi^*: H^n(M) \to H^{n+k}(S^{n+k})$ sind Isomorphismen. Aus der Kommutativität von (9) folgt daher: $\varphi^{*-1}(S_k^n)$ ist die Untergruppe der Elemente $\bar{\pi}$ aus $H^n(G_k)$ mit der Eigenschaft: Bei jeder Abbildung f_M (s. 3.) ist $f_M^*(\bar{\pi}) = 0$. Wegen $f_M^*(w_i) = \overline{W}_i$ (s. A. α) besteht $\varphi^{*-1}(S_k^n)$ gerade aus den Relationen zwischen normalen Stiefel-Whitneyschen Zahlen. Wir erhalten also: Ein Element $\bar{\pi}(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ aus $H^n(G_k)$ ist genau dann eine Relation zwischen normalen Stiefel-Whitneyschen Zahlen, wenn es sich in der Form

$$\varphi^{*-1}\big((Sq\,p' + p')_{n+k}\big), \quad p' \in H^*(MO(k)), \tag{10}$$

schreiben läßt. Zum Beweis des Satzes 1'' haben wir jetzt lediglich noch (10) in (8) umzurechnen.

$H^*_+(MO(k))$ besteht (bis zur Dimension $2k-1 \geq n+k$) aus allen Elementen der Form $p' = p \cdot w_k$, $p \in H^*(G_k)$ (s. B.). Aus den Wuschen Formeln [vgl. (4)]

$$Sq^r w_i = \sum_{t=0}^{r} \binom{i-r+t-1}{t} w_{r-t} \cdot w_{i+t} \text{ folgt } Sq^r w_k = w_r \cdot w_k \ (w_\nu = 0 \text{ für } \nu > k!),$$

d.h. $Sq w_k = w \cdot w_k$. Daher ist

$$Sq p' + p' = Sq(p \cdot w_k) + p \cdot w_k = Sq p \cdot Sq w_k + p \cdot w_k = (w \cdot Sq p + p) \cdot w_k,$$

also $\varphi^{*-1}(Sq p' + p') = w \cdot Sq p + p$ (s. B.). φ^* erhöht die Dimension um k (s. 2.), also ist $\varphi^{*-1}((Sq p' + p')_{n+k}) = (\varphi^{*-1}(Sq p' + p'))_n = (w \cdot Sq p + p)_n$, q.e.d.

Literatur

[1] BOREL, A.: La cohomologie de certains espaces homogènes. Comment. Math. Helv. **27**, 165—197 (1953). — [2] CARTAN, H.: Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 425—427 (1950). — [3] PUPPE, D.: Über Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. (Erscheint demnächst.) — [4] RHAM, G. DE: Variétés différentiables. Act. sci. industr. 1222, Paris. — [5] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton Math. Ser. 14. — [6] STEENROD, N.: Products of cocycles and extensions of mappings. Ann. of Math. **48**, 290—320 (1947). — [7] STEENROD, N.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations; cyclic reduced powers of cohomology classes. Proc. Nat. Acad. USA. **39**, 217—223 (1953). — [8] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. **28**, 17—86 (1954). — [9] WU, WEN-TSÜN: Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 508—511 (1950). — [10] WU, WEN-TSÜN: Les i-carrés dans une variété grassmannienne. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 918—920 (1950). — [11] WU, WEN-TSÜN: On the product of sphere-bundles and the duality theorem modulo two. Ann. of Math. **49**, 641—653 (1948).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. November 1955)

Mohanty, R., and S. Mohapatra
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 207—213 (1956)

On the absolute logarithmic summability of a Fourier series

By
R. Mohanty and S. Mohapatra

1. Let $f(t)$ be L integrable in $(-\pi, \pi)$ and periodic with period 2π and let

$$f(t) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty A_n(t). \tag{1.1}$$

We write

$$\varphi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}, \tag{1.2}$$

$$\Phi(t) = \int_t^\pi \frac{\varphi(u)}{u}\, du = \varphi_1(t) \log \frac{2\pi}{t}. \tag{1.3}$$

Definition. Let $\lambda = \lambda(w)$ be continuous, differentiable and monotonic increasing in $(0, \infty)$ and let it tend to infinity as $w \to \infty$. A series $\sum a_n$ is summable $|R, \lambda, r|$ where $r > 0$, if $\int_A^\infty \frac{r\lambda'(w)}{\{\lambda(w)\}^{r+1}} \left| \sum_{n<w} \{\lambda(w) - \lambda(n)\}^{r-1} a_n \right| < \infty$ where A is a positive fixed number [2].

The object of the present paper is to prove the following

Theorem. *If $\varphi_1(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$, then (1.1) is summable $|R, \log w, k|$ for every $k > 1$.*

Remark. The order of summability in the conclusion of the above theorem can not be replaced by 1 as $|R, \log w, 1|$ summability of a Fourier series is a non-local property of its generating function [3] and therefore can not be ensured by the hypothesis of the theorem, which is obviously a local one.

2. In the proof of the theorem we require the following inequalities for the kernel $h(w, t) = \sum_{n<w} \log n \left(\log \frac{w}{n}\right)^{k-1} \cos nt$.

$$h(w, t) = O\{t^{-1} \log w (\log wt)^{k-2}\}, \tag{2.1}$$

$$h(w, t) = O\{w (\log w)^k\}. \tag{2.2}$$

The proof of (2.2) is trivial. For the proof of (2.1) we require the following lemmas.

Lemma 1. $\int_\alpha^\beta \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t\, du = O(1)$ *for* $0 < t < \pi$, $0 < \alpha \leqq t$; *and* $\alpha < \beta \leqq wt$.

PROOF. We have

$$\int_\alpha^\beta \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right]+\frac{1}{2}\right)t\,du = \int_\alpha^{t\left[\frac{\alpha}{t}\right]+t} + \int_{t\left[\frac{\alpha}{t}\right]+t}^{t\left[\frac{\beta}{t}\right]} + \int_{t\left[\frac{\beta}{t}\right]}^{\beta}$$

$$= O(1) + t \sum_{\left[\frac{\alpha}{t}\right]+1 \le n < \left[\frac{\beta}{t}\right]} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t + O(1)$$

$$= O(1) + t\,O(t^{-1}) + O(1) = O(1),$$

for $0<t<\pi$ *and* $t \le \alpha < \beta \le wt$.

LEMMA 2.

$$\int_\alpha^\beta \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right]+\frac{1}{2}\right)t\,\frac{du}{u} = O(1)$$

for $0<t<\pi$ and $t \le \alpha < \beta \le wt$.

PROOF.

$$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^\pi + \int_\pi^\beta = P + Q.$$

By the second mean value theorem and Lemma 1, we have

$$Q = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{\beta'} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right]+\frac{1}{2}\right)t\,du = O(1)$$

where $\pi<\beta'<\beta$.

Now

$$|P| = \left|\int_\alpha^\pi \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right]+\frac{1}{2}\right)t\,\frac{du}{u}\right| \le O(1)\int_t^\pi \left(u+O(t)\right)\frac{du}{u}$$

$$= O\{(\pi-t)\} + O(t\log t) = O(1).$$

Proof of (2.1). We have

$$\sum_{1\le n<w}\left(\log\frac{w}{n}\right)^{k-1}\log n\cos nt = \int_1^w \frac{d}{dx}\left\{\left(\log\frac{w}{x}\right)^{k-1}\log x\right\}\left(\frac{1}{2}+\sum_{1\le n<x}\cos nt\right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\int_1^w \sin\left([x]+\frac{1}{2}\right)t\left\{\frac{\left(\log\frac{w}{x}\right)^{k-1}}{x} - (k-1)\frac{\left(\log\frac{w}{x}\right)^{k-2}}{x}\log x\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\left[k\int_1^w \frac{\sin\left([x]+\frac{1}{2}\right)t}{x}\left(\log\frac{w}{x}\right)^{k-1}dx - \right.$$

$$\left. - (k-1)\log w\int_1^w \frac{\left(\log\frac{w}{x}\right)^{k-2}}{x}\sin\left([x]+\frac{1}{2}\right)t\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\left[k\int_t^{wt}\sin\left(\left[\frac{u}{t}\right]+\frac{1}{2}\right)t\left(\log\frac{wt}{u}\right)^{k-1}\frac{du}{u} - \right.$$

$$\left. - (k-1)\log w\int_t^{wt}\sin\left(\left[\frac{u}{t}\right]+\frac{1}{2}\right)t\left(\log\frac{wt}{u}\right)^{k-2}\frac{du}{u}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\left[I_1 - \log w\, I_2\right].$$

Now

$$I_1 = k \int_t^{wt} \left(\log \frac{wt}{u}\right)^{k-1} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t \frac{du}{u}$$

$$= k (\log w)^{k-1} \int_t^{\beta} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t \frac{du}{u},$$

and hence by the second mean value theorem and Lemma 2,

$$I_1 = O\{(\log w)^{k-1}\}. \tag{2.3}$$

Again

$$I_2 = \int_t^{wt} = \int_t^{wt-1} + \int_{wt-1}^{wt} = P_1 + Q_1.$$

$$P_1 = \int_t^{wt-1} = \int_t^{\mu} + \int_{\mu}^{\eta wt} + \int_{\eta wt}^{wt-1} = P_2 + P_3 + P_4,$$

where μ is a constant and η has been so chosen that $\dfrac{\left(\log \dfrac{wt}{u}\right)^{k-2}}{u}$ is monotonic decreasing in $0 < u < \eta\, wt$ and also monotonic increasing in $\eta\, wt \leqq w < wt - 1$, η lying between 0 and 1.

Therefore by the second mean value theorem, since $\left(\log \dfrac{wt}{u}\right)^{k-2}$ is monotonic increasing

$$\left\{\begin{aligned} P_2 &= \left(\log \frac{wt}{\mu}\right)^{k-2} \int_t^{\mu} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t \frac{du}{u} \\ &= O\{(\log wt)^{k-2}\}, \quad \text{by Lemma 2.} \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

Applying the second mean value theorem again,

$$\left\{\begin{aligned} P_3 &= \int_{\mu}^{\eta wt} \frac{\left(\log \dfrac{wt}{u}\right)^{k-2}}{u} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t\, du \\ &= \frac{\left(\log \dfrac{wt}{\mu}\right)^{k-2}}{\mu} \int_{\mu}^{\xi} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t\, du \qquad (\mu < \xi < \eta\, wt) \\ &= O\{(\log wt)^{k-2}\} \quad \text{by Lemma 1.} \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

Since $\dfrac{\left(\log \dfrac{wt}{u}\right)^{k-2}}{u}$ is monotonic increasing in $\eta\, wt < u < wt - 1$ we have by the second mean value theorem and Lemma 1,

$$P_4 = O\left\{\frac{\left(\log \dfrac{wt}{wt-1}\right)^{k-2}}{wt-1}\right\} = O\left\{\frac{1}{(wt-1)^{k-1}}\right\} = O\left\{\frac{1}{(wt)^{k-1}}\right\}. \tag{2.6}$$

Thus from (2.4), (2.5), and (2.6),

$$P_1 = O\{(\log wt)^{k-2}\}. \tag{2.7}$$

Now

$$|Q_1| = \left| \int_{wt-1}^{wt} \frac{\left(\log \frac{wt}{u}\right)^{k-2}}{u} \sin\left(\left[\frac{u}{t}\right] + \frac{1}{2}\right) t\, du \right|$$

$$\leq \int_{wt-1}^{wt} \frac{\left(\log \frac{wt}{u}\right)^{k-2}}{u}\, du$$

$$= O\left\{\left(\log \frac{wt}{wt-1}\right)^{k-1}\right\} = O\left\{\frac{1}{(wt)^{k-1}}\right\}.$$

Thus

$$I_2 = O\{(\log wt)^{k-2}\} \tag{2.8}$$

and from (2.3) and (2.8)

$$h(w,t) = O\{t^{-1} \log w (\log wt)^{k-2}\}.$$

3. PROOF OF THE THEOREM. On integrating by parts twice in succession we find

$$\left\{\begin{aligned} A_n(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t) \cos nt\, dt = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\Phi'(t) \cos nt\, dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} d\{\varphi_1(t)\}\left\{t \log \frac{2\pi}{t} \cos nt + \frac{\sin nt}{n}\right\}, \\ &= u_n + v_n. \end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

The series $\sum u_n$ is summable $|R, \log w, k|$ if

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{k\, dw}{w(\log w)^{k+1}} \sum_{n<w} \log n \left(\log \frac{w}{n}\right)^{k-1} u_n < \infty$$

substituting for u_n from (3.1) it is easy to see that

$$I \leq \frac{2k}{\pi}\int_0^{\pi} J\, |d\varphi_1(t)|\, t \log \frac{2\pi}{t}, \tag{3.2}$$

where

$$J = \int_A^{\infty} \frac{dw}{w(\log w)^{k+1}} |h(w,t)|.$$

Since $\int_0^{\pi} |d\varphi_1(t)|$ is finite, it is enough to show that

$$J = O\left\{t^{-1}\left(\log \frac{2\pi}{t}\right)^{-1}\right\} \quad \text{for} \quad 0 < t < \pi.$$

Now

$$\left\{\begin{aligned} J &= \int_A^{\infty} \frac{dw}{w\,(\log w)^{k+1}}\,|h(w,t)| \\ &= \int_A^{2\pi/t} + \int_{2\pi/t}^{\infty} = J_1 + J_2. \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

Employing (2.2), we have

$$J_1 < C \int_A^{2\pi t} \frac{dw}{\log w} = O\left\{t^{-1}\left(\log \frac{2\pi}{t}\right)^{-1}\right\}. \tag{3.4}$$

Employing (2.1), we have

$$J_2 < C\,t^{-1} \int_{2\pi/t}^{\infty} \frac{(\log w\,t)^{k-2}}{w\,(\log w)^{k}}\,dw, \tag{3.5}$$

and

$$\left\{\begin{aligned} \int_{2\pi/t}^{\infty} \frac{(\log w\,t)^{k-2}}{w\,(\log w)^{k}}\,dw &= \left[-\frac{\left(1-\dfrac{\log \frac{1}{t}}{\log w}\right)^{k-1}}{(k-1)\log \frac{1}{t}}\right]_{2\pi/t}^{\infty} \\ &= O\left\{\left(\log \frac{2\pi}{t}\right)^{-1}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Hence from (3.5) and (3.6)

$$J_2 = O\left\{t^{-1}\left(\log \frac{2\pi}{t}\right)^{-1}\right\},$$

and therefore by (3.4) and (3.6), we have

$$J = O\left\{t^{-1}\left(\log \frac{2\pi}{t}\right)^{-1}\right\}. \tag{3.7}$$

Now

$$v_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\{\varphi_1(t)\}\,\frac{\sin n\,t}{n}.$$

Since $\varphi_1(t)$ is of bounded variation, $\sum v_n$ is summable $|C, \delta|$, $\delta > 0$, $[I]$ and hence it is summable $|C, 1+\delta|$ and a fortiori summable $|R, \log w, 1+\delta|$, $\delta > 0$ i.e. summable $|R, \log w, k|$, $k > 1$.

Thus the proof of the theorem is complete.

4. The integral I_2 in section 2 is analogous to the integral

$$\int_0^{\lambda} \left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^{k} \frac{\sin u}{u}\,du, \qquad -1 < k < 0,$$

which naturally suggests the problem of $(R, \log w, k)$ summability of $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$, where $-1 < k < 0$. That the integral is bounded $(R, \log w, k)$ is implied in a result due to WANG [4].

For proving the summability $(R, \log w, k)$, $-1 < k < 0$, of $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du$ to the value $\frac{\pi}{2}$, we have only to show that

$$\int_0^\lambda \left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^k \frac{\sin u}{u}\, du \sim \frac{\pi}{2} (\log \lambda)^k. \tag{4.1}$$

The proof of this is very similar to that of the result due to WANG referred to above and is sketched below for the sake of completeness.

We write

$$\int_0^\lambda \left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^k \frac{\sin u}{u}\, du = \int_0^\mu + \int_\mu^{\lambda e^k} + \int_{\lambda e^k}^{\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}} + \int_{\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}}^{\lambda}$$

$$= P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$$

Now

$$P_1 = \int_0^\mu \left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^k \frac{\sin u}{u}\, du = (\log \lambda)^k \int_0^\mu \left(1 - \frac{\log u}{\log \lambda}\right)^k \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$= (\log \lambda)^k P_1^*.$$

Since

$$P_1^* \to \int_0^\mu \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\}$$

$$P_1 \sim \frac{\pi}{2} (\log \lambda)^k. \tag{4.2}$$

$$P_2 = \frac{\left(\log \frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\mu} \int_\mu^\xi \sin u\, du = O\left\{\frac{(\log \lambda)^k}{\mu}\right\}, \tag{4.3}$$

where $\mu < \xi < \lambda e^k$, since $\frac{\left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^k}{u}$ is monotonic decreasing.

$$P_3 = \left(\log e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^k \frac{1}{\lambda} e^{\frac{1}{\lambda}} \int_{\xi'}^{\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}} \sin u\, du = O\left(\frac{1}{\lambda^{k+1}}\right), \quad \left(\lambda e^k < \xi' < \lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}\right), \tag{4.4}$$

$$|P_4| \leq \int_{\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}}}^{\lambda} \frac{\left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^k}{u}\, du = \left(\log e^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{k+1} = O\left(\frac{1}{\lambda^{k+1}}\right) \tag{4.5}$$

and therefore by (4.2), (4.3), (4.4) and (4.5)

$$\int_0^{\lambda} \left(\log \frac{\lambda}{u}\right)^k \frac{\sin u}{u}\, du \sim \frac{\pi}{2} (\log \lambda)^k.$$

We are thankful to the referee for his kind suggestions in obtaining the requisite inequality for the kernel $h(w, t)$ and for certain other remarks

References

[1] Bosanquet, L. S.: Note on the absolute summability (C) of a Fourier series. J. London Math. Soc. (1) **11**, 11—15 (1936). — [2] Mohanty, R.: On the absolute Riesz summability of a Fourier series and its allied series. Proc. London Math. Soc. (2) **52**, 295—320 (1951). — [3] Mohanty, R.: On the summability $|R, \log w, 1|$ of a Fourier series. J. London Math. Soc. **25**, 67—72 (1950). — [4] Wang, F. T.: On the summability of Fourier series by Riesz's Logarithmic mean, II. Tohoku Math. J. **40**, 273—292 (1935).

Department of Mathematics, Ravenshaw College, Cuttack (India)

(Eingegangen am 23. November 1955)

EICHLER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 214 (1956)

Berichtigung zu meiner Arbeit über den Hilbertschen Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers

Von
MARTIN EICHLER

Durch unglückliche Umstände wurden meine Korrekturen zu der oben genannten, in Band 64, S. 229—242 erschienenen Arbeit nicht ausgeführt. Sie müssen nun nachträglich als Berichtigung erscheinen.

S. 229. Die erste Formel lautet

$$F_n(x, x') = \prod\left(x - j\left(\frac{r_1\tau' + r_2}{r_3}\right)\right).$$

S. 231. Z. 16, 17 von unten. Der hier stehende Satz wird in folgender Form verständlicher: „Das der (wie gezeigt eindeutig fixierten) Isomorphie $\mathfrak{o} \cong \mathfrak{o}_i$ dem $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ entsprechende $\mathfrak{o}_i$-Ideal heiße $\mathfrak{a}_i$." — Die im folgenden auftretenden Permutationen sollen mit σ'_C, σ'_{C_1} usw. (also mit einem Akzent) bezeichnet werden.

S. 233. Z. 5 an Stelle von „wie gezeigt" lies „wie vorausgesetzt wird". — Der zweite Absatz auf dieser Seite ist durch folgenden Text zu ersetzen: „Wenn $\mathfrak{o}_0$ im Gegensatz zur Behauptung nicht mit $\mathfrak{o}$ isomorph wäre, so wäre $\mathfrak{o}_0$ entweder mit einer echten Teilordnung von $\mathfrak{o}$ isomorph ($\mathfrak{o}$ ist maximal!), oder aber die von $\mathfrak{o}_0$ und $\mathfrak{o}$ erzeugten quadratischen Zahlkörper wären nicht isomorph. Beides führt auf einen Widerspruch. Im letzteren Falle ist dieses fast evident. Im ersteren Falle nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{o}_0 < \mathfrak{o}$ an. Es seien $[1, \omega]$ mit $s(\omega) = 0$ oder 1 und $[1, f\omega]$ Basen von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_0$; dabei ist f eine natürliche Zahl > 1. Die kleinsten Normen von nicht rationellen Elementen aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_0$ sind $n(\omega)$ und $f^2 n(\omega)$. Mithin gibt es kein Element in $\mathfrak{o}_0$ der Norm $n(\omega)$, im Widerspruch zur Voraussetzung."

S. 235. Z. 18—19 ersetze durch:

$$\xi_1^{\sigma'_C} \equiv \xi_1^{p^{-e}} \bmod \mathfrak{P}_1.$$

Dies gilt auch unter Vertauschung von ξ_1 und $\xi_1^{\sigma'_C}$. Also kann man — Z. 9 von unten lies $\xi_3^{\sigma'_C} \equiv \xi_3^p \bmod \mathfrak{P}_3$. — Z. 8 von unten lies σ'_C an Stelle von σ_C.

S. 236. Z. 9 lies $(\xi_i^{\sigma'_C \sigma_1} - \xi_i^{p^2})(\xi_i^{p^2 \sigma'_C \sigma_1} - \xi_i)$. Ferner Z. 5 von unten: Im gleichen Zuge ergibt sich, zunächst für $f > 1$: Hilfssatz 2. *Für eine Klasse C ist $\sigma_C^{\pm 1}$ der Frobenius-Automorphismus eines Primteilers $\mathfrak{P}$ von p in K, wobei p die Norm eines Primideals $\mathfrak{p}$ ersten Grades aus der Klasse C ist. Das gilt für fast alle $\mathfrak{p}$ dieser Klasse. Usw.*"

S. 241. Z. 5 lies „in k" an Stelle von „von K". — Z. 7 lies „Hilfssatz 6" statt „Hilfssatz 2". — Z. 7 von unten lies „Hilfssatz 6" statt „Hilfssatz 5". — Z. 9 von unten bis zum Schluß: lies σ_C an Stelle von σ'_C und σ_0 an Stelle von σ'_0. — Letzte Z. lies σ'_C an Stelle von σ_C.

S. 242. Z. 1 und Z. 7 lies σ_C und σ_0 an Stelle von σ'_C und σ'_0. — Z. 12 lautet richtig

$$\xi_i^{\sigma_C} \equiv \xi_i^{\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{p}, \qquad \xi_i^{\sigma_C} \equiv \xi_i^{\bar{\mathfrak{p}}} \bmod \bar{\mathfrak{p}}.$$

Münster i. Westf., Rosenstr. 9

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von **S. Flügge** und **F. Trendelenburg**, unter Mitwirkung von W. Bothe und F. Hund.

Soeben erschien:

Neunundzwanzigster Band: Mit 162 Abbildungen. III, 397 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 72.—; Ganzleinen DM 75.20

Inhaltsübersicht: **Ionisation und Dissoziation von Gasen und Dämpfen durch Elektronenstoß.** Von H. Neuert, Hamburg. — **Inorganic Crystal Phosphors.** Von F. A. Kröger, Eindhoven/Holland. — **Bestimmung der charakteristischen Größen eines Halbleiters aus elektrischen, optischen und magnetischen Messungen.** Von G. Busch und U. Winkler, Zürich. — **Raumladungswellen.** Von W. Kleen, J. Labus, K. Pöschl, München. — **Halbleitende Verbindungen mit vorwiegend homöopolarem Charakter.** Von Hch. Welker, Erlangen. — **Multiple Galaxies.** By F. Zwicky, Pasadena (Calif.), USA. — Inhalt der Bände 11—29. (Namen und Sachverzeichnis.)

Im Juli 1955 erschien:

Achtundzwanzigster Band: Mit 268 Abbildungen. III, 483 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 79.80; Ganzleinen DM 83.—

Inhaltsübersicht: **Erzeugung und Anwendung von Röntgenblitzen.** Von W. Schaaffs, Berlin-Siemensstadt. — **Ergebnisse der Experimente mit künstlichen π-Mesonen.** Von H. Thurn, Frankenthal, Pfalz. — **Theoretische Behandlung von Problemen der Mesonenphysik.** Von S. Flügge, Marburg/Lahn. — **The spectroscopy of nuclear gamma-rays by direct crystal diffraction methods.** By J. W. M. Du Mond, Pasadena (Calif.), USA. — **Bedeutung der Korpuskularbestrahlung für die Eigenschaften von Festkörpern.** Von K. Lintner und E. Schmid, Wien. — **Technik und Anwendung der Kernemulsionen.** Von M. Teucher, Bern. — Inhalt der Bände 11—28. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einführung in die Atomphysik

Von **Wolfgang Finkelnburg**, Honorarprofessor an der Universität Erlangen. Vierte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 266 Abbildungen. XI, 545 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 45.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen. — Atomspektren und Atombau. — Die quantenmechanische Atomtheorie. — Die Physik der Atomkerne. — Physik der Moleküle. — Festkörper-Atomphysik. — Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen. — Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen zur dritten Auflage:

... Die anschauliche Darstellung, die ganz auf das Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge abgestellt ist und schon die vorangehenden Auflagen so erfreulich auszeichnete, macht dieses Standardwerk auch weiterhin zu einem Buch, das nicht nur für den Physiker, sondern auch für die Wissenschaftler der Nachbargebiete und vor allem für den Ingenieur ein ausgezeichnetes Hilfsmittel bildet, um sich einen Überblick über die moderne Atomphysik und ihre jüngste Entwicklung zu verschaffen. Darüber hinaus vermittelt das Buch dem Leser etwas von dem ungewöhnlichen Reiz physikalischer Forschungsarbeit.

„Elektrotechnische Zeitschrift"

... Der Verfasser bezeichnet das Werk als eine Einführung, und er bemüht sich um eine anschauliche Darstellung unter Wahrung der physikalischen Exaktheit. Zweifellos hat er hierin eine Meisterschaft erreicht, welche den außerordentlichen Erfolg des Buches begründet. Ein besonderer Vorzug des Werkes liegt in einer eingehenden Darstellung der experimentellen Methoden, welche die modernste Entwicklung (z. B. Transistorphysik, Laufzeitmethoden der Massenspektroskopie) einschließt. Aber auch die Behandlung der Theorie eröffnet — durchweg unter Vermeidung ausführlicher Rechnungen — den Weg in das Verständnis der für die Behandlung atomphysikalischer Probleme entwickelten Wellen- und Quantenmechanik ...

Professor Gerthsen-Karlsruhe in „Angewandte Chemie"

... Finkelnburgs Einführung in die Atomphysik ist eines der inhaltsreichsten Bücher, die in den letzten Jahrzehnten geschrieben worden sind. Für den Studenten und den Physiker ist es eine Fundgrube von Anregungen und gleichzeitig ein Nachschlagewerk, in dem man nicht nur eine kurze Schilderung des Gegenstandes, sondern auch zugleich die wesentlichen Literaturhinweise findet. Für den eiligen Leser, der sich nur kurz informieren möchte, oder der den Gegenstand schon einigermaßen zu kennen glaubt, sind die wesentlichen Gesichtspunkte in Kursivdruck hervorgehoben. Dies ist wirklich „Dienst am Kunden". Eine große Zahl zwar einfacher, aber höchst instruktiver Abbildungen erleichtern die Lektüre.

Man würde Finkelnburgs schönem Werk nicht gerecht werden, wenn man nur seinen Inhalt beachtet. Es liegt zwar nahe, daß bei wissenschaftlichen Werken die Qualität der sprachlichen Darstellung hinter dem Inhalt zurücktritt und deshalb nur selten eine Würdigung findet. Es gibt aber wissenschaftliche Werke, denen man nicht nur ihres Inhalts wegen ein hohes Niveau zusprechen darf, sondern die auch wegen der Klarheit ihres Ausdrucks und der Eleganz ihres Stiles als literarische Erzeugnisse gewertet werden können. Man kann ruhig vom Stil der naturwissenschaftlichen Literatur sprechen und Finkelnburg ist ein Meister dieses Stiles.

Professor Weizel-Bonn in „Physikalische Blätter"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany